

DETERMINAÇÃO DE ARMADURAS EM LAJES ANALISADAS PELO MEF E SUBMETIDAS A CAMPOS DE MOMENTOS COM TORSORES IMPORTANTES

JOÃO TIAGO ARAÚJO VIANA

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

Orientador: Professor Doutor Rui Manuel Carvalho Marques de Faria

JULHO DE 2008

DETERMINAÇÃO DE ARMADURAS EM LAJES ANALISADAS PELO MEF E SUBMETIDAS A CAMPOS DE MOMENTOS COM TORSORES IMPORTANTES

JOÃO TIAGO ARAÚJO VIANA

Relatório de Projecto submetido para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

Orientador: Professor Doutor Rui Manuel Carvalho Marques de Faria

JULHO DE 2008

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2007/2008

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ miec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2007/2008 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2008*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respectivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão electrónica fornecida pelo respectivo Autor.

Aos meus Pais e queridos irmãos

Ninguém é tão grande que não possa aprender, nem tão pequeno que não possa ensinar

Carlos Pecotche

AGRADECIMENTOS

Sendo este momento de grande importância para a minha vida, é com enorme satisfação que apresento publicamente o merecido agradecimento às pessoas que me asseguraram um apoio inestimável no desenvolvimento deste trabalho:

- Como não poderia deixar de ser, quero em primeiro lugar agradecer ao Professor Rui Faria, orientador científico desta tese, o apoio pelas muitas vezes que solicitei para discussão de todos os assuntos. Renovo o meu agradecimento por todos os preciosos ensinamentos transmitidos ao longo destes dois anos, desde que comecei como seu aluno, os quais resultam numa elevada estima, consideração e admiração pessoal e profissional.
- À Professora Ana Maria Faustino pela enorme amabilidade na ajuda que sempre me concedeu nos muitos momentos de dúvidas relacionados com o desenvolvimento do algoritmo.
- Ao Professor Paulo Avilez Valente pelo significativo contributo prestado na procura da função ideal para obter os mapas de cores.
- Aos colegas João Moreira Alves e João Barbosa pela extraordinária amabilidade que sempre demonstraram nos momentos que lhes solicitei ajuda, sem os quais, a finalização deste trabalho teria sido mais árdua.
- A todos os meus colegas da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, que sempre me motivaram para o desenvolvimento deste trabalho, principalmente ao Eufrásio Abreu, Bruno Abreu, Micaela Morim, André Ferreira, Vânia Mendes, Ana Maria e Luís Sousa. Em especial, gostaria de destacar a imensurável ajuda dos meus colegas Bruno Abreu e Eufrásio Abreu ao longo destes anos, com os quais tive a honra de partilhar lado a lado o percurso académico, culminando numa intensa e terna amizade que me leva a exprimir o meu profundo e sincero agradecimento.
- Também não podia de deixar de agradecer a todos os colegas voluntários do Grupo de Acção Social do Porto – G.A.S. Porto – pelas inúmeras ternas demonstrações de carinho, afecto e incentivo. Um especial agradecimento à Marlene Ferreira por todo o carinho, delicadeza, sensibilidade e apoio nesta fase final do curso. À D. Adelaide Almeida que acerca de três eu visito semanalmente como voluntário, expresse o profundo agradecimento pelas demonstrações de carinho, afecto e encorajamento.
- “Porque os últimos são sempre os primeiros”, quero agradecer à minha família, e em particular aos meus pais Olinda Viana (Linda) e Manuel Viana (Viana) e queridos irmãos Sílvia (a Silvi), José (o Zé), Jacinta (a Cinta) e Carlos (o Berto), a quem devo desculpas por tantas demonstrações de desatenção, principalmente nesta fase final de curso, a qual de uma forma egoísta atraíu toda a minha concentração e dedicação. Reitero o meu sentido e profundo agradecimento pelo amor e carinho. Também à D. Cândida e Sr. Manuel Gonçalves agradeço todo o apoio e carinho, salientando a forma amável e extraordinária com que me acolheram durante os primeiros do curso, fazendo-me sentir como filho.

Ao longo deste trabalho desenvolvido, bem como no restante percurso académico, muitas foram as pessoas que de um certo modo contribuíram para que o desfecho desta fase importante da minha vida fosse o mais proveitoso possível em termos profissionais bem como pessoais. A todas o meu muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido tendo como objectivo a determinação de armaduras em lajes analisadas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), e submetidas a campos de momentos com torsões importantes. Uma especial atenção é dedicada a lajes cujo dimensionamento de armaduras não pode ser encarado com as práticas mais usuais que recorrem a tabelas e faixas de disposição de armaduras, nomeadamente as baseadas nas metodologias do Montoya ou na Norma Britânica BS 8110. São exemplos destas situações, que podem envolver momentos torsões importantes, os casos de lajes com grandes aberturas, com apoios pontuais em pilares, ou com bordos livres.

Efectuada a análise pelo MEF, que conduz à obtenção dos esforços actuantes nas lajes que variam de ponto para ponto, surge a necessidade de uma implementação automática, que a partir dos procedimentos preconizados no Anexo F da versão de 2004 do Eurocódigo 2 (EC2), possibilite a obtenção das armaduras nas lajes e correspondente verificação das tensões de compressão máximas no betão.

O presente documento inicia-se com a dedução das expressões gerais que permitem depois deduzir as equações do Anexo F do EC2 para determinação das armaduras em lajes envolvendo campos genéricos de momentos flectores e torsões.

Em seguida é realizada a apresentação do programa desenvolvido, o DesignSlab, que realiza automaticamente o referido dimensionamento de armaduras. Procede-se ainda à referida validação deste com base em 7 exemplos adequadamente seleccionados e abordados em bibliografia da especialidade.

Diversas aplicações são apresentadas na parte final do trabalho, no decurso das quais são analisadas lajes em que a existência de geometrias complexas, de apoios pontuais, a ocorrência de grandes aberturas, a actuação de cargas localizadas ou outras singularidades, não permite a utilização de tabelas de cálculo, surgindo consequentemente momentos torsões importantes com grande preponderância no comportamento estrutural e, consequentemente, no dimensionamento das armaduras.

PALAVRAS-CHAVE: MEF, lajes, momentos torsões, dimensionamento de armaduras, EC2

ABSTRACT

The present work was developed with the aim of defining the reinforcement in slabs analyzed by the Finite Element Method (FEM) and submitted to bending moments m_x , m_y and torsional moments m_{xy} . A special attention is dedicated to slabs where reinforcement design can not be made following standard procedures based on tables and bands with predefined percentages of the maximum reinforcement, namely the ones based on the Montoya or the BS 8110 methodologies. As examples of these situations, which may involve important torsional moments, one can refer slabs with large openings, supported in columns, or with free edges.

Once the analysis is concluded, which leads to moments in the slabs varying from point to point, an automatic implementation of the procedures of Annex F of Eurocode 2 (EC2) is rather convenient, allowing for computation of the necessary reinforcement as well as the control of the compressive stresses in the concrete.

The present document starts with derivation of the general expressions that allow thereafter to arrive to the equations of Annex F of EC2, for determining the reinforcement in slabs submitted to generalized fields of bending and torsional moments.

After that, the developed program DesignSlab for the automatic design of reinforcement, is presented. Validation of this program is also presented, based on 7 examples appropriately selected from bibliography.

Several applications are presented in the final part of the work, dealing with slabs where occurrence of complex geometries supports slabs, large openings, concentrated loads or other singularities do not allow the use of simplified table based methodologies, with great relevance for the slab structural behaviour, and accordingly for the reinforcement design.

KEYWORDS: FEM, slabs, torsional moments, reinforcement design, EC2

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	v

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
1.2. OBJECTIVOS DO PRESENTE TRABALHO	2
1.3. ORGANIZAÇÃO EM CAPÍTULOS	3

2. METODOLOGIAS PARA DETERMINAÇÃO DE ARMADURAS EM LAJES COM TORSÕES IMPORTANTES

2.1. INTRODUÇÃO	5
2.2. MÉTODO GERAL RECORRENDO ÀS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	6
2.3. DISPOSIÇÕES DO MODELO CÓDIGO 90 – MC90	23
2.4. METODOLOGIA APRESENTADA PELO EUROCÓDIGO – EC2	26
2.4.1. EUROCÓDIGO 2 – VERSÃO 1992	26
2.4.2. EUROCÓDIGO 2 – VERSÃO 2004	27
2.5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	29

3. CÓDIGO DESENVOLVIDO PARA DIMENSIONAMENTO DE ARMADURAS EM LAJES

3.1. INTRODUÇÃO	31
3.2. UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO DESIGNSLAB	32
3.3. FLUXOGRAMA DO PROGRAMA DESIGNSLAB	33
3.4. BREVE ABORDAGEM AOS ELEMENTOS FINITOS	37
3.5. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO – DESIGNSLAB	38
3.5.1. PROCEDIMENTO NO ROBOT MILLENNIUM	38
3.5.2. APRESENTAÇÃO DO INTERFACE GRÁFICO DO PROGRAMA DESIGNSLAB	41
3.6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	45

4. EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DESENVOLVIDO

4.1. INTRODUÇÃO	47
4.2. EXEMPLOS.....	47
4.2.1. EXEMPLO 1 – ELEMENTO SUJEITO A UM CAMPO DE MOMENTOS GENÉRICO.....	48
4.2.2. EXEMPLO 2 – LAJE SIMPLEMENTE APOIADA	49
4.2.2.1. Análise Estrutural – Robot Millennium	50
4.2.2.2. Resultados do Cálculo de Armadura com o Programa DesignSlab	51
4.2.2.3. Análise dos Resultados Obtidos por Lourenço (1992).....	62
4.2.3. EXEMPLO 3 – LAJE ENCASTRADA EM TRÊS LADOS E LIVRE NO OUTRO LADO	64
4.2.3.1. Análise Estrutural – Robot Millennium	65
4.2.3.2. Resultados do Cálculo de Armadura com o Programa DesignSlab	66
4.2.3.3. Análise dos Resultados Obtidos por Lourenço (1992).....	68
4.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS	72

5. APLICAÇÃO DO CÓDIGO DESENVOLVIDO AO DIMENSIONAMENTO DE ARMADURAS EM LAJES

5.1. INTRODUÇÃO	73
5.2. EXEMPLOS.....	74
5.2.1. EXEMPLO 1 – LAJE ENCASTRADA NOS 4 BORDOS, SEGUNDO MONTOYA.....	74
5.2.2. EXEMPLO 2 – LAJE ENCASTRADA NOS 4 BORDOS, SEGUNDO A NORMA BRITÂNICA BS 8110 (1985)	80
5.2.3. EXEMPLO 3 – LAJE ENCASTRADA E SIMPLEMENTE APOIADA EM 2 BORDOS, SEGUNDO O MONTOYA	87
5.2.4. EXEMPLO 4 – LAJE ENCASTRADA E SIMPLEMENTE APOIADA EM 2 BORDOS, SEGUNDO A NORMA BRITÂNICA BS 8110 (1985).....	90
5.2.5. EXEMPLO 5 – LAJE ENCASTRADA EM 2 BORDOS E APOIADA NUM PILAR	95
5.2.6. EXEMPLO 6 – LAJE ENCASTRADA EM 2 BORDOS E COM UMA ABERTURA.....	100
5.2.7. EXEMPLO 7 – LAJE APOIADA EM 2 PILARES	104
5.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS	109

6. CONCLUSÕES

6.1. CONCLUSÕES GERAIS	111
6.2. SUGESTÕES PARA FUTURO DESENVOLVIMENTO	113

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1 – a) Parede; b) Laje.....	1
Fig. 2.1 – Esforços de flexão num elemento de laje	5
Fig. 2.2 – Elemento de casca; a) Momentos aplicados; b) Forças de membrana aplicadas	6
Fig. 2.3 – Elemento de laje com as camadas de armadura.....	7
Fig. 2.4 – Direcções das linhas de rotura.....	7
Fig. 2.5 – Forças resistentes num elemento de laje (na direcção x); a) Forças a que a armadura resiste; b) Forças que o betão resiste	8
Fig. 2.6 – Posição das armaduras e da resultante do bloco de tensões no betão no mesmo nível	16
Fig. 2.7 – Posição das armaduras e da resultante do bloco de tensões em níveis diferentes.....	19
Fig. 2.8 - Forças nas camadas exteriores e interior devido aos momentos m_x , m_y e m_{xy}	24
Fig. 2.9 – Exemplo do modelo de resistência aos momentos torsores	24
Fig. 2.10 – Armaduras em U para os bordos livres.....	25
Fig. 2.11 – Visualização duma região fendilhada	28
Fig. 2.12 – Visualização duma região não fendilhada	28
Fig. 3.1 – Procedimento da ferramenta DesignSlab	33
Fig. 3.2 – Tipo de elemento finito e visualização dos pontos de Gauss; a) Integração completa; b) Integração reduzida.....	37
Fig. 3.3. – Selecção na barra de ferramentas da opção para obtenção das tabelas – “View”, “Tables”.....	38
Fig. 3.4. – Opções a escolher no “Tables: Data and Results” para visualizar as tabelas pretendidas	38
Fig. 3.5. – Visualização no canto inferior esquerdo das três tabelas.....	39
Fig. 3.6. – Exportação da tabela referente às coordenadas dos nós dos elementos finitos	39
Fig. 3.7. – Gravação da tabela referente às coordenadas dos nós dos elementos finitos	40
Fig. 3.8. – Gravação da tabela referente às coordenadas dos nós dos elementos finitos	40
Fig. 3.9. – Opção para correr o programa – “Run DesignSlab”	41
Fig. 3.10. – Painel interactivo da ferramenta DesignSlab	42
Fig. 3.11 – Caixa de diálogo.....	42
Fig. 3.12. – Representação da laje	43
Fig. 3.13 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y; c) Tensões no betão.....	44
Fig. 4.1 – Esforços presentes no elemento de laje	48
Fig. 4.2 – Geometria e carga para a laje simplesmente apoiada	49
Fig. 4.3 – Momentos principais negativos (amarelo) e positivos (azul)	50

Fig. 4.4 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}	51
Fig. 4.5 – Janela com os materiais e espessura da laje a dimensionar	52
Fig. 4.6 – Armaduras superior e inferior segundo x	52
Fig. 4.7 – a) Momento M_{xy} no canto e representação dos elementos finitos; b) Numeração dos nós dos elementos finitos	53
Fig. 4.8 – Visualização das secções para o traçado da armadura	56
Fig. 4.9 – Diagrama das armaduras superior e inferior para as secções 2 e 1	57
Fig. 4.10 – Reconstrução do diagrama de armadura superior na direcção x	58
Fig. 4.11 – Armaduras superior e inferior segundo y	58
Fig. 4.12 – Diagrama das armaduras superior e inferior para as secções 3 e 4	60
Fig. 4.13 – Reconstrução do diagrama da armadura superior segundo a direcção y	60
Fig. 4.14 – Verificação do esmagamento do betão	61
Fig. 4.15 – a) Armadura superior na direcção x ; b) Armadura inferior na direcção x (Lourenço)	63
Fig. 4.16 – a) Armadura superior na direcção y ; b) Armadura inferior na direcção y (Lourenço)	63
Fig. 4.17 - Armaduras na direcção y	64
Fig. 4.18 – Geometria e carga para a laje simplesmente apoiada	64
Fig. 4.19 – Momentos principais negativos (amarelo) e positivos (azul)	65
Fig. 4.20 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}	66
Fig. 4.21 – Armaduras superior e inferior segundo x	67
Fig. 4.22 – Armaduras superior e inferior segundo y	67
Fig. 4.23 – Verificação do esmagamento do betão	68
Fig. 4.24 – a) Armadura superior na direcção x ; b) Armadura inferior na direcção x (Lourenço)	69
Fig. 4.25 – a) Armadura superior na direcção y ; b) Armadura inferior na direcção y (Lourenço)	69
Fig. 4.26 – Secções para o traçado da armadura	70
Fig. 4.27 – a) Armadura superior na direcção y ; b) Armadura inferior na direcção y	70
Fig. 4.28 – a) Armadura superior na direcção y ; b) Armadura inferior na direcção y	70
Fig. 4.29 – a) Armadura superior na direcção y ; b) Armadura inferior na direcção y	71
Fig. 4.30 – a) Armadura superior na direcção y ; b) Armadura inferior na direcção y	71
Fig. 5.1 – Laje encastrada nos 4 bordos	74
Fig. 5.2 – Visualização da representação dos momentos segundo Montoya (2000)	75
Fig. 5.3 – Disposição da armadura segundo as tabelas do Montoya (2000); a) Disposição da armadura inferior; b) Disposição da armadura superior	76
Fig. 5.4 – Armaduras de canto (camadas superior e inferior)	77
Fig. 5.5 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}	78

Fig. 5.6 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y	79
Fig. 5.7 – Tensões no betão.....	80
Fig. 5.8 – Representação dos momentos segundo a metodologia da Norma Britânica BS 8110.....	81
Fig. 5.9 – Divisão da armadura inferior em faixas.....	82
Fig. 5.10 – Armaduras de canto	82
Fig. 5.11 – Regras simplificadas para dispensa de armaduras em lajes.....	83
Fig. 5.12 – Representação dos momentos redistribuídos introduzidos na laje	83
Fig. 5.13 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}	84
Fig. 5.14 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y	85
Fig. 5.15 – Tensões no betão.....	86
Fig. 5.16 – Laje encastrada em 2 bordos e simplesmente apoiada nos outros 2 bordos	87
Fig. 5.17 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}	88
Fig. 5.18 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y	89
Fig. 5.19 – Visualização da malha ortogonal de armaduras na camada inferior	90
Fig. 5.20 – Representação dos momentos segundo a metodologia da Norma Britânica BS 8110.....	91
Fig. 5.21 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}	92
Fig. 5.22 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y.....	93
Fig. 5.23 – Visualização das armaduras de canto na camada inferior	94
Fig. 5.24 – Tensões no betão.....	95
Fig. 5.25 – Laje encastrada em 2 bordos e apoiada num pilar.....	96
Fig. 5.26 – a) Secção de controlo u_1 ; b) Determinação de b_e	97
Fig. 5.27 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}	98
Fig. 5.28 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y.....	99
Fig. 5.29 – Tensões no betão.....	100
Fig. 5.30– Caso de estudo de uma laje de um pavimento de um edifício industrial.....	101
Fig. 5.31 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}	102
Fig. 5.32 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y.....	103
Fig. 5.33 – Tensões no betão.....	104
Fig. 5.34 – Laje apoiada em dois pilares sujeita a cargas uniformemente distribuídas e pontuais.....	104
Fig. 5.35 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy} d) Momentos principais	107
Fig. 5.36 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y.....	108
Fig. 5.37 – Tensões no betão.....	109

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 4.1 – Momentos, armaduras e tensões no betão para o elemento finito 750.....	53
Quadro 4.2 – Momentos flectores e torsões no nó 2306 (nó 1 do elemento finito 750).....	54
Quadro 4.3 – Momentos, armaduras e tensões no betão para o elemento finito 750.....	54
Quadro 4.4 – Média do valor de armadura superior segundo a direcção y no canto.....	55
Quadro 4.5 – Média do valor de armadura inferior segundo a direcção y no canto.....	56
Quadro 4.6 – Momentos e tensões no elemento finito 595	61
Quadro 4.7 – Momentos e tensões no elemento finito 564	62

1

INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

As lajes, tal como as paredes, são consideradas estruturas laminares, isto é, possuem uma das dimensões muito menor que as outras duas, tal como ilustrado na Figura 1.1. São estruturas planas sujeitas principalmente a esforços perpendiculares ao seu plano médio, desenvolvendo deste modo, esforços de flexão e momentos torsores. As lajes de betão armado podem classificar-se sob diversos pontos de vista, nomeadamente quanto ao tipo de apoio (lajes vigadas ou fungiformes), à respectiva constituição (lajes maciças, aligeiradas ou nervuradas, de vigotas pré-esforçadas, alveolares ou mistas), ao modo de flexão dominante (lajes armadas numa ou em duas direcções), à caracterização do comportamento (lajes finas ou espessas) e também ao processo construtivo (lajes betonadas in situ ou com pré-fabricação parcial ou total).

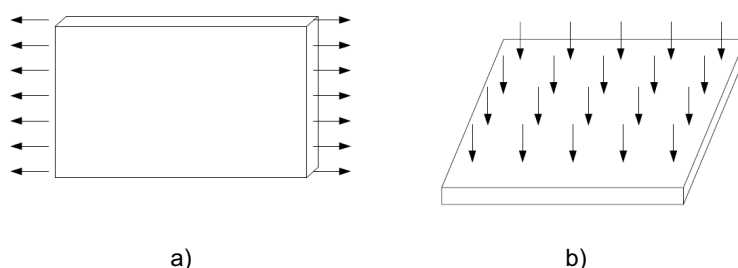


Fig. 1.1 – a) Parede; b) Laje

No que aos métodos de análise de lajes diz respeito, quando a geometria, condições fronteira e carregamento são simples, é possível encontrar soluções analíticas para as deformadas e esforços internos. Assim, a análise e dimensionamento de armaduras em lajes com geometria regular, sujeitas a carregamentos uniformes ou lineares e com condições de apoio definidas por bordos encastrados ou simplesmente apoiados, pode ser efectuada com recurso a tabelas de cálculo que fornecem os esforços e deslocamentos em determinados pontos ou regiões das lajes, uma vez que estas apresentam normalmente duas zonas bem distintas em termos da natureza dos esforços internos. Isto é, nas

referidas condições estas lajes apresentam zonas com predominância dos momentos flectores, nas quais os momentos torsões têm pouca importância (caso das faixas centrais dos vãos e dos bordos de continuidade), e zonas com predominância de momentos torsões e baixos momentos flectores (caso das regiões dos cantos). Estas zonas poder-se-ão designar zona dos flectores e zona dos torsões, respectivamente. Normalmente nas zonas dos torsões estes momentos assumem valores máximos da ordem de grandeza dos máximos momentos flectores, o que conduz à adopção de regras de dimensionamento e de disposição de armaduras bem conhecidas, das quais se destacam as especificadas no Montoya (2000) e na Norma Britânica BS 8110 (1985).

No entanto, a análise e dimensionamento de lajes com características especiais não podem ser realizados com apoio de tabelas, sendo necessário recorrer a técnicas numéricas para determinação dos esforços internos. As técnicas numéricas mais correntes para a análise de lajes baseiam-se no Método dos Elementos Finitos (MEF), no Método dos Elementos Fronteira e no Método das Diferenças Finitas. Neste trabalho é dada ênfase ao MEF, que conheceu um grande desenvolvimento com o avanço dos computadores, o que permitiu a popularização do uso de programas de elementos finitos por parte dos projectistas, de tal modo que estes constituem hoje ferramentas de uso generalizado. De facto, quando devidamente utilizado o MEF torna-se uma ferramenta poderosa de análise das estruturas, admitindo quer as hipóteses de elasticidade linear quer de comportamento não-linear. Como exemplos das situações de lajes cujo dimensionamento de armaduras não pode ser encarado com as regras práticas acima referenciadas, citam-se os casos que envolvem momentos torsões importantes em zonas desconhecidas *a priori*, que podem coexistir com momentos flectores elevados, como sucede em lajes com grandes aberturas, com apoios pontuais em pilares, ou com bordos livres. Nestes casos a análise com base em programas que utilizam o MEF conduz, num referencial Oxy implantado no folheto médio da lajes, a momentos flectores M_x , M_y e a momento torsor M_{xy} que variam de ponto para ponto, sendo então necessário um procedimento especial para dimensionar as armaduras necessárias. No Anexo F da versão de 2004 do Eurocódigo 2 (EC2), bem como no Anexo A2 da versão de 1991 do EC2, é referido um procedimento que atende à simultaneidade de ocorrência de momentos flectores e torsões com valores importantes, de grande utilidade para o projecto corrente. Assim, é objectivo deste trabalho explorar a utilização deste procedimento no dimensionamento de lajes de diferentes tipos e condições, pretendendo-se a implementação num algoritmo que receba como dados os momentos M_x , M_y e M_{xy} obtidos na análise pelo MEF, efectuando a determinação das armaduras necessárias e a correspondente verificação das tensões nas bielas comprimidas de betão.

1.2. OBJECTIVOS DO PRESENTE TRABALHO

No seguimento das considerações anteriores, os objectivos deste trabalho passam essencialmente pelo desenvolvimento dos seguintes aspectos:

- Estudo e análise das metodologias associadas às expressões que permitem a determinação das armaduras nas lajes com momentos flectores e torsões importantes, preconizadas no EC2.

- Implementação de um código computacional para dimensionamento de lajes submetidas a campos de momentos flectores e torsores genéricos.
- Validação do código computacional desenvolvido (designado por DesignSlab).
- Aplicação do DesignSlab a casos de estudo.

1.3. ORGANIZAÇÃO EM CAPÍTULOS

Do ponto de vista do respectivo conteúdo, o presente trabalho foi organizado em seis capítulos e dois anexos, nos quais se procurou cobrir, com algum desenvolvimento, os aspectos mais relevantes relacionados com a problemática dos momentos torsores em lajes, culminando com a implementação do código computacional DesignSlab.

Assim e, no seguimento à presente introdução, no **Capítulo 2** é feita um estudo e análise sobre a metodologia base aplicada ao caso de um elemento de laje sujeito unicamente a esforços de flexão e torção. A partir deste caso, é feita a dedução das expressões gerais que permitem a determinação de armaduras em lajes. Neste capítulo, são apresentadas também as disposições do Código Modelo 90 – MC90, bem como os procedimentos referidos no Anexo A2 da versão de 1991 do EC2, e no Anexo F da versão de 2004 do EC2.

Depois de desenvolvido o algoritmo, o **Capítulo 3** é reservado para a apresentação do DesignSlab, onde são detalhados os passos a executar pelo programa em questão, sendo exemplificado com a aplicação a um caso de estudo. É feita também uma breve referência à forma como são obtidos os resultados pelo MEF no programa Robot Millennium.

No **Capítulo 4** são estudados e comparados os resultados obtidos pela metodologia estudada no **Capítulo 2** e os resultados homólogos obtidos pelo programa DesignSlab, de forma a validar este código computacional. Nesse sentido, são também analisados exemplos com o programa DesignSlab, os quais foram anteriormente alvo de estudo por parte dum investigador da área estrutural.

No **Capítulo 5** são apresentadas as aplicações que constituem o objectivo preferencial do presente trabalho, relacionadas com a ocorrência de momentos torsores importantes em lajes com características especiais. Este capítulo é iniciado com a análise de dois casos de estudo, comparando dimensionamentos e disposições de armadura baseados nas bem conhecidas metodologias do Montoya e da Norma Britânica BS 8110, com o intuito de constatar a razoabilidade dos resultados fornecidos pelo programa DesignSlab, principalmente no que toca aos valores máximos de armadura e às respectivas faixas de colocação. Termina-se este capítulo com a aplicação a três casos de estudo envolvendo momentos torsores importantes em lajes, ao ponto de condicionarem o comportamento destas e consequentemente o dimensionamento das correspondentes armaduras.

No **Capítulo 6** procede-se a uma apreciação global do trabalho desenvolvido, e sintetizam-se as conclusões mais relevantes. São igualmente apontadas vias para a exploração nesta área de investigação consideradas de maior atenção, e ainda a introdução de melhoramentos no algoritmo desenvolvido.

2

METODOLOGIAS PARA DETERMINAÇÃO DE ARMADURAS EM LAJES COM TORSORES IMPORTANTES

2.1. INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem como principal objectivo apresentar a metodologia base para determinação de armaduras em lajes de betão armado apresentado no Anexo F da versão de 2004 do EC2, bem como no Anexo A2 da versão de 1991 do EC2. Essa metodologia foi inicialmente apresentada por Gupta (1986), o qual apresentou um procedimento recorrendo às equações de equilíbrio para a determinação de armaduras em paredes e cascas, que será pormenorizada no presente capítulo de forma a compreender as expressões que são utilizadas pelo EC2, com maior ênfase no que respeita a lajes, dado ser esse o assunto do trabalho desenvolvido.

Assim sendo, o objectivo deste capítulo passa por, a partir de um elemento de laje sujeito a momentos de cálculo M_x , M_y e M_{xy} , tal como convencionalmente ilustrado na Figura 2.1, deduzir as expressões para determinação de armaduras em lajes pelo EC2.

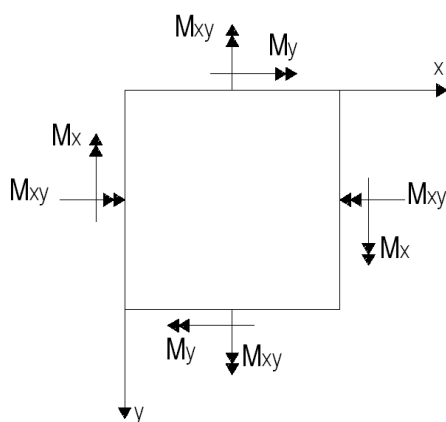


Fig. 2.1 – Esforços de flexão num elemento de laje

Nesta capítulo e, ainda segundo Gupta, demonstrar-se-á que no caso de não existirem esforços de membrana, determinadas expressões que têm por base esta metodologia, por exemplo as do EC2, que não incluem os efeitos de interacção entre as camadas de armaduras superior e inferior na mesma direcção, poderão subestimar o dimensionamento, como num exemplo se verificará.

Neste capítulo aproveita-se também para apresentar as disposições do Modelo Código 90 – MC90, o qual sugere a utilização do “Modelo das três camadas” para resistir aos esforços presentes em lajes. Verificar-se-á que este modelo está em sintonia com a metodologia apresentada por Gupta. Também no que toca ao EC2, serão apresentados os procedimentos descritos no Anexo F da versão de 2004, bem como os do Anexo A2 da versão de 1991.

2.2. MÉTODO GERAL RECORRENDO ÀS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O método geral recorrendo às equações de equilíbrio, sugerido por Gupta (1986), apresenta um modelo de resolução em que elementos de parede ou cascas sujeitos a esforços de membrana N_x , N_y , N_{xy} e a esforços de flexão M_x , M_y e M_{xy} , ilustrados como positivos convencionalmente na Figura 2.2, são resistidos pelas resultantes das forças de tracção nas armaduras superior e inferior nas duas direcções, e pelas forças de compressão desenvolvidas nos blocos de betão comprimido, como se visualizam na Figura 2.5.

Chama-se a atenção para o facto de que as considerações aqui apresentadas se baseiam em equações de equilíbrio considerando a ortogonalidade das armaduras, dispostas segundo os eixos cartesianos x e y , como representados na Figura 2.2.

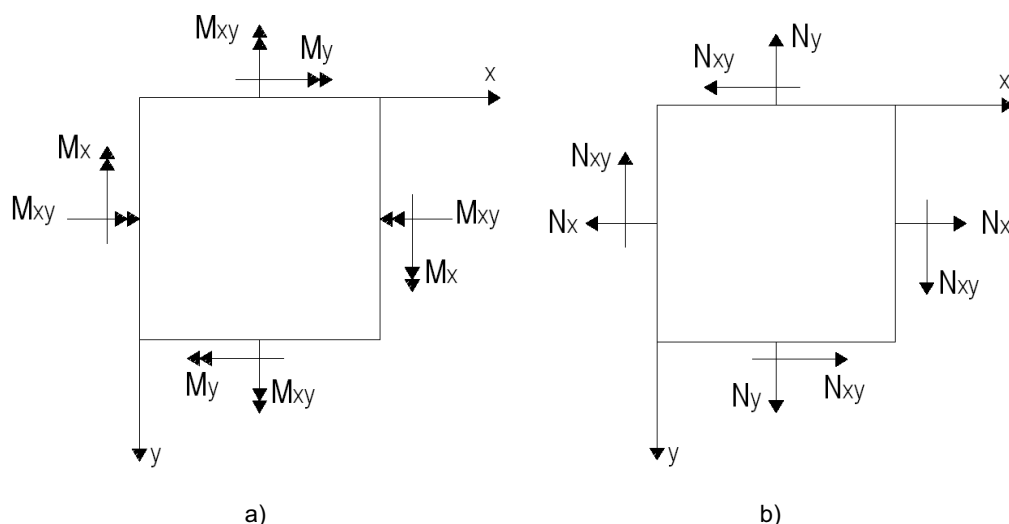


Fig. 2.2 – Elemento de casca; a) Momentos aplicados; b) Forças de membrana aplicadas

Sendo que esta metodologia se aplica tendo em linha de conta forças no plano, há então a necessidade de materializar os momentos em forças e, segundo Gupta, Baumann sugere um braço de $0,8h$ entre as

forças nas camadas superior e inferior, onde h é a espessura do elemento de casca; este valor será utilizado no programa desenvolvido no âmbito do presente trabalho.

Apesar do procedimento apresentado por Gupta ser aplicável a elementos de casca, isto é, elementos sujeitos a momentos e forças, nesta dissertação apresentar-se-á o desenvolvimento das expressões de equilíbrio em elementos de laje sujeitos apenas a esforços de flexão e torção, com o intuito de objectivamente correlacionar com o tema do presente trabalho.

Assim sendo, a Figura 2.3 mostra um elemento de laje com duas camadas de armadura orientadas nas direcções x e y . A capacidade resistente da armadura passará a ser designada por N_{sxt} , N_{syt} , N_{sxb} e N_{syb} em que o índice s está associado à armadura (steel), os índices x e y estão associados à direcção e t e b estão associados à camada superior (top) e inferior (bottom), respectivamente.

Na camada superior desenvolvem-se linhas de rotura num plano vertical cuja normal faz um ângulo θ_t com o eixo x no plano xy , ilustrado na Figura 2.4. Assim, o betão está sujeito a uma compressão paralela a este plano, sendo a espessura da camada superior de betão comprimido a_t , como ilustrado na Figura 2.5. Do mesmo modo, e para a camada inferior, θ_b designa a normal ao plano de rotura, e a_b é a espessura do correspondente bloco de tensões rectangular no betão.

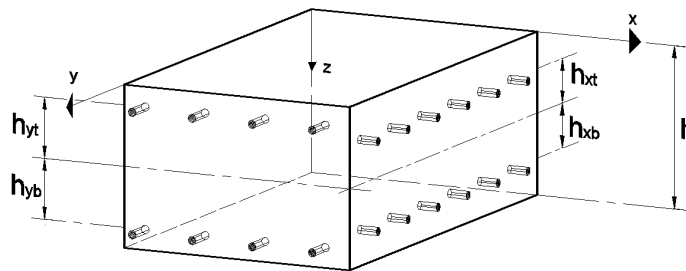


Fig. 2.3 – Elemento de laje com as camadas de armadura

Na Figura 2.3 estão representados também os respectivos braços das armaduras em relação ao eixo médio do elemento de laje, sendo h_{xt} e h_{xb} os braços das armaduras segundo a direcção x nas camadas superior e inferior, respectivamente, e h_{yt} e h_{yb} os braços das armaduras segundo a direcção y nas camadas superior e inferior, respectivamente.

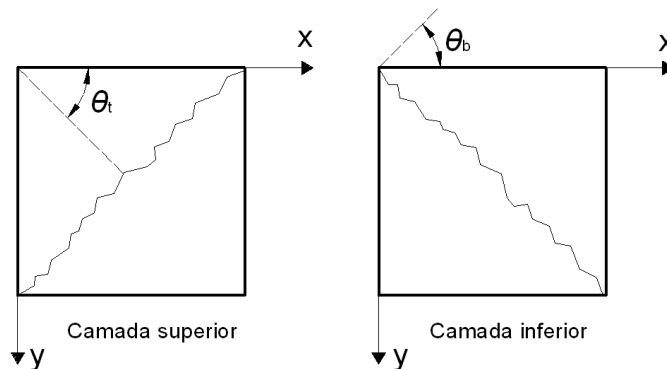


Fig. 2.4 – Direcções das linhas de rotura

Assim sendo, a partir das forças a que a armadura resiste em cada direcção x e y , dadas pelas equações (2.1)

$$N_{sx} = N_{sxt} + N_{sxb} \qquad N_{sy} = N_{syt} + N_{syb} \qquad (2.1)$$

obtêm-se os momentos resistentes das armaduras nas duas direcções ortogonais num elemento de laje (2.2).

$$M_{sx} = -N_{sxt} h_{xt} + N_{sxb} h_{xb} \qquad M_{sy} = -N_{syt} h_{yt} + N_{syb} h_{yb} \qquad (2.2)$$

Sabendo que, de acordo com o EC2 (ver secção 6.5.2), a tensão de compressão no betão tem de ser limitada a $f_{cd1} = f_{cd}$ numa região em que a escora está transversalmente comprimida, ou a $f_{cd2} = 0,60'f_{cd}$ no caso de a escora ser fendilhada por tracções transversais, então as forças no betão nas camadas superior e na camada inferior são dadas por (2.3), para o caso de compressão máxima no betão limitada a f_{cd2} .

$$N_{ct} = -a_t f_{cd2} \qquad N_{cb} = -a_b f_{cd2} \qquad (2.3)$$

Na Figura 2.5 ilustram-se estas forças resistentes para o caso de compressão máxima no betão limitada a f_{cd2} .

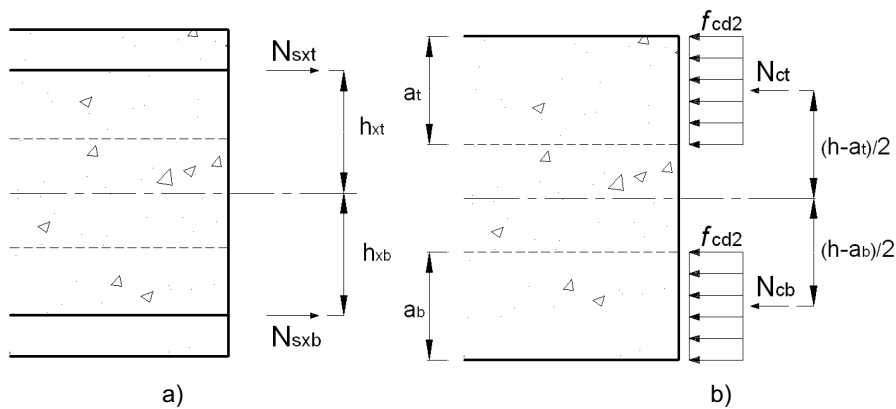


Fig. 2.5 – Forças resistentes num elemento de laje (na direcção x); a) Forças a que a armadura resiste; b) Forças que o betão resiste

A partir das forças apresentadas em (2.3) obtêm-se os momentos correspondentes dados por (2.4).

$$M_{ct} = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{ct} \qquad M_{cb} = -\frac{1}{2}(h - a_b)N_{cb} \qquad (2.4)$$

As forças e momentos resistentes num elemento de laje dados pelas equações (2.2) a (2.4), terão estar em equilíbrio com as forças e momentos actuantes. Como tal, vem que:

$$N_x = N_{sx} + N_{ct} \sin^2 \theta_t + N_{cb} \sin^2 \theta_b \qquad (2.5)$$

$$N_y = N_{sy} + N_{ct} \cos^2 \theta_t + N_{cb} \cos^2 \theta_b \qquad (2.6)$$

$$N_{xy} = -N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - N_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \qquad (2.7)$$

$$M_x = M_{sx} + M_{ct} \sin^2 \theta_t + M_{cb} \sin^2 \theta_b \qquad (2.8)$$

$$M_y = M_{sy} + M_{ct} \cos^2 \theta_t + M_{cb} \cos^2 \theta_b \qquad (2.9)$$

$$M_{xy} = -M_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - M_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \qquad (2.10)$$

Através das equações (2.5) a (2.10) obtêm-se as expressões N_{ct} e N_{cb} em função dos esforços aplicados ao elemento de laje. Assim sendo obtêm-se:

$$M_{xy} = -M_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - M_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \qquad (2.11)$$

$$M_{ct} = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{ct} \qquad (2.12)$$

$$M_{cb} = -\frac{1}{2}(h - a_b)N_{cb} \qquad (2.13)$$

$$N_{xy} = -N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - N_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \qquad (2.14)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2}(h - a_t) N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - \frac{1}{2}(h - a_b) N_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (2.15)$$

$$N_{cb} = \frac{-N_{xy} - N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t}{\sin \theta_b \cos \theta_b} \quad (2.16)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2}(h - a_t) N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - \frac{1}{2}(h - a_b) \frac{-N_{xy} - N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t}{\sin \theta_b \cos \theta_b} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (2.17)$$

$$M_{xy} - \frac{1}{2}(h - a_b) N_{xy} = \frac{1}{2}(h - a_t) N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t + \frac{1}{2}(h - a_b) N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t \quad (2.18)$$

$$M_{xy} - \frac{1}{2}(h - a_b) N_{xy} = N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t \left(\frac{1}{2}(h - a_t) + \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \quad (2.19)$$

onde

$$\frac{1}{2}(h - a_t) + \frac{1}{2}(h - a_b) = \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}a_t + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}a_b = h - \frac{1}{2}a_t - \frac{1}{2}a_b = h - \frac{a_t + a_b}{2} = h_c \quad (2.20)$$

Tal como se observa na Figura 2.5, esta expressão (2.20) é o braço entre as forças internas desenvolvidas nas camadas superior e inferior do betão. Substituindo na expressão (2.19), resulta:

$$N_{ct} = \frac{M_{xy} - \frac{1}{2}(h - a_b) N_{xy}}{h_c \sin \theta_t \cos \theta_t} \quad (2.21)$$

$$N_{ct} = \frac{M_{xy} - \frac{1}{2}(h - a_b) N_{xy}}{\frac{1}{2}h_c \sin 2\theta_t} \quad (2.22)$$

$$N_{ct} = -\frac{(h - a_b) N_{xy} - 2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_t} \quad (2.23)$$

Da mesma forma obtém-se

$$N_{cb} = -\frac{(h - a_t)N_{xy} + 2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_b} \quad (2.24)$$

As expressões (2.23) e (2.24) aplicam-se para o caso de cascas, pois estão em função de esforços de membrana, N_{xy} , e de flexão, M_{xy} . Como o presente trabalho está focado em lajes, tais expressões vêm apenas em função dos esforços de flexão.

$$N_{ct} = \frac{2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_t} \quad N_{cb} = -\frac{2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_b} \quad (2.25)$$

Pelas expressões em (2.25), observa-se a influência do momento torsor nas forças N_{ct} e N_{cb} que se desenvolvem no betão, dependendo unicamente desse esforço na ausência de esforços de membrana. Assim, se verifica que o momento torsor determinará a verificação das tensões nas bielas de compressão no betão.

Conforme referido no Capítulo 1, este trabalho tem por objectivo o cálculo das armaduras em lajes, segundo as direcções x e y . Assim, o objectivo passa por determinar N_{sxt} , N_{sxb} , N_{syt} e N_{syb} , sendo que a_t , a_b , θ_t e θ_b são também incógnitas. Portanto, existem 8 incógnitas para as 6 equações de equilíbrio (2.5) a (2.10), o que significa que 2 incógnitas terão de ser inicialmente arbitradas. Nesse caso serão os ângulos de θ_t e θ_b , escolhidos de forma a minimizar o consumo total de armadura.

De forma a obter as expressões que permitirão o cálculo da armadura nas camadas exteriores, apresenta-se de seguida a dedução de N_{sxt} . Partindo das seguintes expressões:

$$N_x = N_{sx} + N_{ct} \sin^2 \theta_t + N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (2.26)$$

$$N_{sx} = N_{sxt} + N_{sxb} \quad (2.27)$$

$$M_{sx} = -N_{sxt} h_{xt} + N_{sxb} h_{xb} \quad (2.28)$$

$$N_x = N_{sxt} + N_{sxb} + N_{ct} \sin^2 \theta_t + N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (2.29)$$

$$N_{sxb} = \frac{M_{sx} + N_{sxt} h_{xt}}{h_{xb}} \quad (2.30)$$

$$N_x = N_{sxt} + \frac{M_{sx} + N_{sxt} h_{xt}}{h_{xb}} + N_{ct} \sin^2 \theta_t + N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (2.31)$$

$$N_{sxt} \left(1 + \frac{h_{xt}}{h_{xb}} \right) = N_x - \frac{M_{sx}}{h_{xb}} - N_{ct} \sin^2 \theta_t - N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (2.32)$$

Substituindo a expressão (2.11) na equação (2.32) resulta que:

$$N_{sxt} \left(1 + \frac{h_{xt}}{h_{xb}} \right) = N_x - \frac{M_{sx}}{h_{xb}} - \frac{2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_t} \sin^2 \theta_t + \frac{2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_b} \sin^2 \theta_b \quad (2.33)$$

Sendo que

$$1 + \frac{h_{xt}}{h_{xb}} = \frac{h_{xb}}{h_{xb}} + \frac{h_{xt}}{h_{xb}} = \frac{h_{xb} + h_{xt}}{h_{xb}} = \frac{h_x}{h_{xb}} \quad (2.34)$$

logo substituindo na expressão (2.33) em cima vem que:

$$N_{sxt} = N_x \frac{h_{xb}}{h_x} - \frac{M_{sx}}{h_{xb}} \frac{h_{xb}}{h_x} - \frac{2M_{xy}}{2h_c \sin \theta_t \cos \theta_t} \sin^2 \theta_t \frac{h_{xb}}{h_x} + \frac{2M_{xy}}{2h_c \sin \theta_b \cos \theta_b} \sin^2 \theta_b \frac{h_{xb}}{h_x} \quad (2.35)$$

$$N_{sxt} = N_x \frac{h_{xb}}{h_x} - \frac{M_{sx}}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \frac{h_{xb}}{h_x} + \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_b \frac{h_{xb}}{h_x} \quad (2.36)$$

Para que a expressão (2.36) seja escrita em função dos esforços aplicados, M_{sx} pode ser deduzido a partir da expressão (2.8) da seguinte forma

$$M_{sx} = M_x - M_{ct} \sin^2 \theta_t - M_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (2.37)$$

Tendo em atenção as expressões em (2.4), resulta que:

$$M_{sx} = M_x + \frac{1}{2}(h - a_t) N_{ct} \sin^2 \theta_t - \frac{1}{2}(h - a_b) N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (2.38)$$

sendo N_{ct} e N_{cb} expressos pela equação (2.25), dá assim origem a:

$$M_{sx} = M_x - \frac{1}{2}(h - a_t) \frac{2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_t} \sin^2 \theta_t + \frac{1}{2}(h - a_b) \frac{2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_b} \sin^2 \theta_b \quad (2.39)$$

$$M_{sx} = M_x + \frac{1}{2}(h - a_t) \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t + \frac{1}{2}(h - a_b) \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_b \quad (2.40)$$

Portanto, estando também M_{sx} em função dos esforços aplicados, pode-se então obter a expressão para N_{sxt} :

$$N_{sxt} = N_x \frac{h_{xb}}{h_x} - \frac{M_x}{h_x} - \frac{1}{2}(h - a_t) \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \frac{1}{h_x} - \frac{1}{2}(h - a_b) \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_b \frac{1}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \frac{h_{xb}}{h_x} + \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_b \frac{h_{xb}}{h_x} \quad (2.41)$$

$$N_{sxt} = \frac{h_{xb}}{h_x} N_x - \frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \left(\frac{1}{2}(h - a_t) \frac{1}{h_x} + \frac{h_{xb}}{h_x} \right) + \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_b \left(-\frac{1}{2}(h - a_b) \frac{1}{h_x} + \frac{h_{xb}}{h_x} \right) \quad (2.42)$$

$$N_{sxt} = \frac{h_{xb}}{h_x} N_x - \frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \left(\frac{h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_t)}{h_x} \right) + \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_b \left(\frac{h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_x} \right) \quad (2.43)$$

Tal como já anteriormente mencionado, o presente trabalho está direccionado para lajes sujeitas unicamente a esforços de flexão e torção, logo a parcela referente ao esforço de membrana é nula, resultando:

$$N_{sxt} = -\frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \left(\frac{h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_t)}{h_x} \right) + \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_b \left(\frac{h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_x} \right) \quad (2.44)$$

Esta equação pode escrever-se da seguinte forma:

$$N_{sxt} = -\frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} C_{xtt} \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} C_{xtb} \tan \theta_b \quad (2.45)$$

em que:

$$C_{xtt} = \frac{h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_t)}{h_x} \quad C_{xtb} = \frac{h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_x} \quad (2.46)$$

Do mesmo modo, podem-se obter as outras expressões que permitem o cálculo dos esforços nas camadas de armadura superior e inferior. Portanto, as equações (2.1) a (2.25) conduzem a:

$$N_{sxt} = -\frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} C_{xtt} \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} C_{xtb} \tan \theta_b \quad (2.47)$$

$$N_{syx} = -\frac{M_y}{h_y} - \frac{M_{xy}}{h_c} C_{ytt} \cot \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} C_{ytb} \cot \theta_b \quad (2.48)$$

$$N_{sxb} = \frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} C_{xbt} \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} C_{ybb} \tan \theta_b \quad (2.49)$$

$$N_{syb} = \frac{M_y}{h_y} - \frac{M_{xy}}{h_c} C_{ybt} \cot \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} C_{ybb} \cot \theta_b \quad (2.50)$$

em que,

$$C_{xtt} = \frac{h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_t)}{h_x} \quad C_{xbb} = \frac{h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_x} \quad (2.51)$$

$$C_{ytt} = \frac{h_{yb} + \frac{1}{2}(h - a_t)}{h_y} \quad C_{ybb} = \frac{h_{yt} + \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_y} \quad (2.52)$$

são designados por coeficientes directos e

$$C_{xbt} = \frac{h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_t)}{h_x} \quad C_{xtb} = \frac{h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_x} \quad (2.53)$$

$$C_{ybt} = \frac{h_{yb} + \frac{1}{2}(h - a_t)}{h_y} \quad C_{ytb} = \frac{h_{yb} - \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_y} \quad (2.54)$$

por coeficientes cruzados, onde

$$h_x = h_{xt} + h_{xb} \quad h_y = h_{yt} + h_{yb} \quad (2.55)$$

As equações deduzidas por Gupta (1986), permitem calcular a armadura necessária na camada superior, bem como na camada inferior. Assim sendo, está-se perante as equações que permitem determinar as armaduras em lajes segundo o “Modelo das três camadas”. Os coeficientes C_{xbt} , C_{ybt} , C_{xtb} e C_{ytb} , designados por Gupta por coeficientes cruzados, são introduzidos devido ao facto de as armaduras segundo x e y não se localizarem ao mesmo nível ($h_{xt} \neq h_{yt}$, $h_{xb} \neq h_{yb}$) e a resultante do bloco de tensões no betão se localizar ainda a outro nível. Se estes coeficientes cruzados forem nulos e os coeficientes directos C_{xtt} , C_{ytt} , C_{xbb} e C_{ybb} forem unitários obtêm-se exactamente as expressões de dimensionamento na camada superior e inferior sujeitas a esforços de membrana. No presente trabalho tais esforços são devidos a esforços de flexão, conduzindo a

$$N_{sxt} = N_{xt} + N_{xyt} \tan \theta_t = -\frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \quad (2.56)$$

$$N_{syt} = N_{yt} + N_{xyt} \cot g \theta_t = -\frac{M_y}{h_y} - \frac{M_{xy}}{h_c} \cot g \theta_t \quad (2.57)$$

$$N_{sxb} = N_{xb} + N_{xyb} \tan \theta_b = \frac{M_x}{h_x} + \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_b \quad (2.58)$$

$$N_{syb} = N_{yb} + N_{xyb} \cot g \theta_b = \frac{M_x}{h_x} + \frac{M_{xy}}{h_c} \cot g \theta_b \quad (2.59)$$

De forma a visualizar a questão dos coeficientes cruzados serem nulos e os coeficientes directos serem unitários, apresenta-se a Figura 2.6. Consta-se que sendo a distância ao folheto médio das armaduras e do bloco de tensões no betão a mesma, os coeficientes cruzados se anulam e os directos tomam o valor unitário.

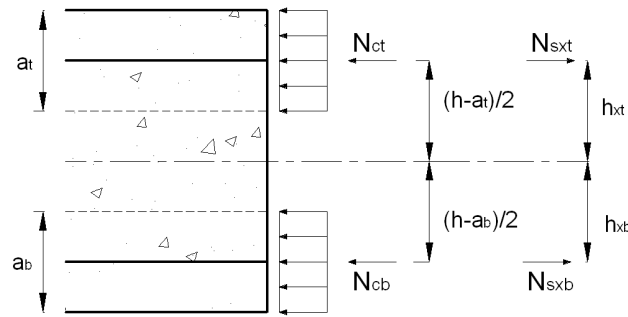


Fig. 2.6 – Posição das armaduras e da resultante do bloco de tensões no betão no mesmo nível

Repare-se que se nestas expressões θ_t e θ_b tomarem o valor de $\pi/4$, surgem as expressões do EC2 na versão de 1992. Portanto, chega-se às equações que permitem a determinação da armadura necessária a colocar no elemento de laje segundo um código internacional – o EC2. Quanto à versão de 2004 do EC2, difere apenas no facto de apresentar expressões envolvendo tensões em vez de momentos (tanto no betão como nas armaduras).

Quanto às forças de compressão no betão, estas podem ser obtidas através das equações (2.25). As tensões no betão podem ser calculadas a partir das equações (2.3):

$$N_{ct} = -a_t f_{cd2} \quad (2.60)$$

$$N_{cb} = -a_b f_{cd2} \quad (2.61)$$

dando origem a

$$f_{ct} = -\frac{N_{ct}}{a_t} \quad f_{cb} = -\frac{N_{cb}}{a_b} \quad (2.62)$$

Apesar desta análise apresentar um aspecto algo delicado, dado o conjunto de equações envolvidas, a sua percepção física é facilmente interpretada. As expressões apresentadas de (2.47) a (2.50) correspondem à distribuição dos esforços de flexão e torção pelas armaduras nas camadas superior e inferior mediante transformações estáticas, tal como no MC90. Isto é: (i) o momento flector em cada direcção conduz a um binário que será equivalente a forças nas armaduras superior e inferior na respectiva direcção; (ii) o momento torsor conduz a um binário que será equivalente a forças de corte na camada superior e inferior de betão; (iii) as expressões (2.51) a (2.54) traduzem a influência dos momentos de interacção entre as camadas de betão e as diferentes camadas de armadura, pelo facto de todas estas forças se localizarem em níveis diferentes, levando ao aparecimento de momentos adicionais, ΔM , tal como Gupta definiu.

No que respeita a esta última observação, achou-se oportuno uma melhor abordagem no que respeita ao aparecimento de momentos adicionais, ΔM , pois segundo Gupta, estes sendo negligenciados, poderão levar a um sub-dimensionamento da armadura necessária. No entanto, quando só existe uma camada de armadura, superior ou inferior, tal efeito de interacção entre camadas não existe, sendo correcta a prática corrente.

Assim sendo, passar-se-á de seguida à dedução dos momentos de cálculo tendo em consideração ΔM , a partir das expressões (2.47) a (2.54):

$$N_{sxt} = -\frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} C_{xtt} \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} C_{xtb} \tan \theta_b \quad (2.63)$$

$$N_{sxb} = \frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} C_{xbt} \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} C_{ybb} \tan \theta_b \quad (2.64)$$

$$N_{sxt} = -\frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} \frac{h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_t)}{h_x} \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} \frac{h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_x} \tan \theta_b \quad (2.65)$$

$$N_{sxb} = \frac{M_x}{h_x} - \frac{M_{xy}}{h_c} \frac{h_{xt} - \frac{1}{2}(h - a_t)}{h_x} \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} \frac{h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_x} \tan \theta_b \quad (2.66)$$

$$h_x N_{sxt} = -M_x - \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_t) \right) \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \tan \theta_b \quad (2.67)$$

$$h_x N_{sxb} = M_x - \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xt} - \frac{1}{2}(h - a_t) \right) \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \tan \theta_b \quad (2.68)$$

Resolvendo a equação (2.68) em ordem a M_x , e posteriormente substituindo na expressão (2.67), resulta que:

$$h_x N_{sxt} = - \left(h_x N_{sxb} + \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_t) \right) \tan \theta_t - \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \tan \theta_b \right) - \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_t) \right) \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \tan \theta_b \quad (2.69)$$

$$h_x N_{sxt} = -h_x N_{sxb} - \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_t) \right) \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \tan \theta_b - \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_t) \right) \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \tan \theta_b \quad (2.70)$$

$$h_x N_{sxt} = -h_x N_{sxb} - \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_t) + h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_t) \right) \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_b) + h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \tan \theta_b \quad (2.71)$$

$$h_x N_{sxt} = -h_x N_{sxb} - \frac{M_{xy}}{h_c} h_x \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} h_x \tan \theta_b \quad (2.72)$$

$$\tan \theta_b = \left(N_{sxt} + N_{sxb} + \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \right) \frac{h_c}{M_{xy}} \quad (2.73)$$

Depois de deduzido $\tan \theta_b$, substitui-se na expressão (2.67), resultando no seguinte:

$$h_x N_{sxt} = -M_x - \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_t) \right) \tan \theta_t + \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \left(N_{sxt} + N_{sxb} + \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \right) \frac{h_c}{M_{xy}} \quad (2.74)$$

$$h_x N_{sxt} - \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) N_{sxt} = \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) N_{sxb} - M_x - \frac{M_{xy}}{h_c} \left(h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_t) \right) \tan \theta_t + \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \left(\frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \right) \quad (2.75)$$

$$N_{sxt} \left(h_x - h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_b) \right) = \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) N_{sxb} - M_x - \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t \left(h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_t) - h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_b) \right) \quad (2.76)$$

$$N_{sxt} \left(h_x - h_{xb} + \frac{1}{2}(h - a_b) \right) = \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) N_{sxb} - M_x - \frac{M_{xy}}{h_c} \tan \theta_t h_c \quad (2.77)$$

$$\left(h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_b) \right) N_{sxt} = \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) N_{sxb} - M_x - M_{xy} \tan \theta_t \quad (2.78)$$

$$M_{sxt} = \Delta M - M_x - M_{xy} \tan \theta_t \quad (2.79)$$

Verifica-se com esta última equação (2.79) o momento a que a camada de armadura superior estará sujeita no caso de as armaduras e a resultante do bloco de tensões se localizarem em níveis diferentes.

Apesar de aparentemente tratar-se de uma incongruência ao associar-se o momento M_{sxt} à camada superior segundo a direcção x , quando às camadas superior e inferior se associam esforços N (deduzidos de um único momento flector que gera tracções numa camada e compressões na camada oposta), verifica-se de facto segundo Gupta, que a camada superior segundo a direcção x estará sujeita a um esforço N_{sxt} originado por um momento M_{sxt} que é a soma de duas parcelas: (i) uma constituída pela soma de M_x e M_{xy} , a qual é comum no cálculo do esforço N_{sxb} para a camada inferior; (ii) outra constituída pelo ΔM , que materializar-se-á num acréscimo de esforço axial ΔN verificado só para a camada superior segundo a direcção x . Através das expressões (2.86) e (2.87), constata-se que para cada camada superior e inferior em cada direcção está associado um ΔM diferente um dos outros. Daí o facto de associar-se o momento à própria camada, dado que cada camada da mesma direcção estará sujeita a momentos diferentes devido ao ΔM , não obstante também da diferença na soma de M_x e M_{xy} , sendo no entanto uma diferença de sinais. Como se constata na Figura 2.7, as armaduras e a resultante do bloco de tensões estão a níveis diferentes.

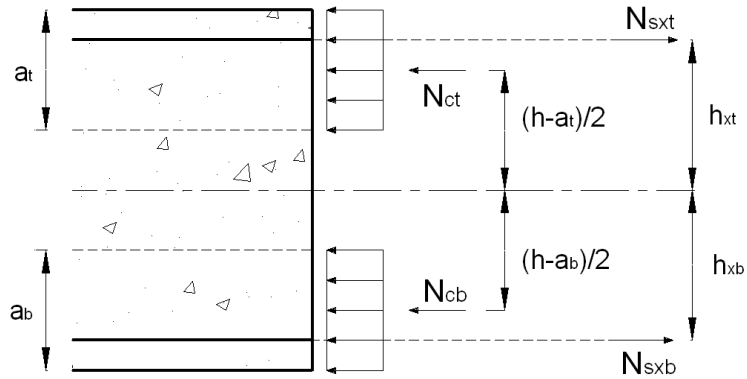


Fig. 2.7 – Posição das armaduras e da resultante do bloco de tensões em níveis diferentes

Assim sendo, e em correspondência com a dedução em (2.78), verifica-se o seguinte:

- (i) no primeiro membro tem-se que $h_{xt} + 1/2(h - a_b)$ é a distância correspondente ao braço da armadura superior em relação à resultante do bloco de tensões na camada inferior no betão, a qual multiplicada pelo N_{sxt} dá o momento total resistente da armadura da camada superior (ver (2.79));

(ii) quanto ao segundo membro, este dá o momento total a que a armadura superior estará sujeita e, tal como se constata, para além do M_x e do M_{xy} aparece também outro termo, $(h_{xb} - 1/2(h - a_b))N_{sxb}$, que é o momento adicional devido à localização da camada inferior de armadura estar a um nível diferente da resultante do bloco de tensões na camada inferior no betão, que Gupta definiu. Assim se a armadura inferior não for necessária, este momento adicional não existe.

Em Gupta (1986), apresenta-se o primeiro membro e o primeiro termo do segundo membro da equação (2.79) de forma a introduzir os coeficientes cruzados e directos, tal como se ilustra a seguir:

$$M_{sxt} = \left(h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_b) \right) N_{sxt} = \frac{h_{xt} + \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_x} h_x N_{sxt} = C_{xbb} h_x N_{sxt} \quad (2.80)$$

$$\Delta M_{sxt} = \left(h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b) \right) N_{sxb} = \frac{h_{xb} - \frac{1}{2}(h - a_b)}{h_x} h_x N_{sxb} = C_{xtb} h_x N_{sxb} \quad (2.81)$$

Procedendo-se de igual forma para a obtenção dos restantes momentos, resulta que:

$$M_{sxt} = \Delta M_{sxt} + M_x + M_{xy} \tan \theta_t \quad M_{syt} = \Delta M_{syt} + M_y + M_{xy} \cot g \theta_t \quad (2.82)$$

$$M_{sxb} = \Delta M_{sxb} + M_x + M_{xy} \tan \theta_b \quad M_{syb} = \Delta M_{syb} + M_y + M_{xy} \cot g \theta_b \quad (2.83)$$

Onde

$$M_{sxt} = -C_{xbb} h_x N_{sxt} \quad M_{syt} = -C_{ybb} h_y N_{syt} \quad (2.84)$$

$$M_{sxb} = C_{xtt} h_x N_{sxb} \quad M_{syb} = C_{ytt} h_y N_{syb} \quad (2.85)$$

$$\Delta M_{sxt} = -C_{xtb} h_x N_{sxb} \quad \Delta M_{syt} = -C_{ytb} h_y N_{syb} \quad (2.86)$$

$$\Delta M_{sxb} = C_{xbt} h_x N_{sxt} \quad \Delta M_{syb} = C_{ybt} h_y N_{syt} \quad (2.87)$$

De forma a constatar a influência de ΔM na obtenção do momento total final, apresenta-se de seguida um exemplo numérico em que: $M_x = M_y = 100 \text{ kN.m}$, $M_{xy} = 150 \text{ kN.m}$ e se admite $\theta_b = -\theta_t = \pi/4$.

Obtém-se então:

$$M_{sxt} - \Delta M_{sxt} = M_{syt} - \Delta M_{syt} = -50 \quad (2.88)$$

$$M_{sxb} - \Delta M_{sxb} = M_{syb} - \Delta M_{syb} = 250 \quad (2.89)$$

Através das expressões (2.82) e (2.83), resulta que:

$$\Delta M_{sxt} = -\frac{C_{xtb}}{C_{xtt}} M_{sxb} \quad (2.90)$$

$$\Delta M_{sxb} = -\frac{C_{xbt}}{C_{xbb}} M_{sxt} \quad (2.91)$$

Admitindo

$$h_x = h_y = 0,8h, \quad h_{xt} = h_{yt} = h_{xb} = h_{yb} = 0,5h_x = 0,5h_y = 0,4h \quad \text{e} \quad a_t = a_b = 0,4h$$

de forma a que as resultantes de armadura e do bloco de tensões nas bielas de betão para a mesma camada estejam a níveis diferentes, sendo neste caso essa diferença de 0,1h, as equações (2.90) e (2.91) resultam no seguinte:

$$\Delta M_{sxt} = -\frac{h_{xt} - 1/2(h - a_b)}{h_{xt} + 1/2(h - a_t)} M_{sxb} = -\frac{0,4h - 1/2(h - 0,4h)}{0,4h + 1/2(h - 0,4h)} M_{sxb} = -\frac{0,1h}{0,7h} M_{sxb} = -\frac{1}{7} M_{sxb} \quad (2.92)$$

$$\Delta M_{sxb} = -\frac{h_{xt} - 1/2(h - a_t)}{h_{xt} + 1/2(h - a_t)} M_{sxt} = -\frac{0,4h - 1/2(h - 0,4h)}{0,4h + 1/2(h - 0,4h)} M_{sxt} = -\frac{0,1h}{0,7h} M_{sxt} = -\frac{1}{7} M_{sxt} \quad (2.93)$$

Logo,

$$\Delta M_{syt} = -\frac{1}{7} M_{sxb} \quad (2.94)$$

$$\Delta M_{syb} = -\frac{1}{7} M_{sxt} \quad (2.95)$$

Substituindo em (2.88) e (2.89) resulta que:

$$M_{sxt} + \frac{1}{7}M_{sxb} = -50 \quad (2.96)$$

$$M_{sxb} + \frac{1}{7}M_{sxt} = 250 \quad (2.97)$$

obtendo-se

$$M_{sxt} = M_{syt} = -87,5 \text{ kN.m} \quad (2.98)$$

$$M_{sxb} = M_{syb} = 262,5 \text{ kN.m} \quad (2.99)$$

Note-se que desprezando ΔM os momentos totais de cálculo seriam $M_{sxt} = M_{syt} = -50 \text{ kN.m}$ e $M_{sxb} = M_{syb} = 250 \text{ kN.m}$. Como se constata nesse exemplo, negligenciando ΔM têm-se erros consideráveis na obtenção dos momentos de cálculo, que são de 5% para a camada inferior e de cerca de 43% para a camada superior. Assim, observa-se que este efeito que Gupta evidenciou, poderá em determinados casos levar a um sub-dimensionamento das lajes.

Repare-se também que no caso de $a_t = a_b = 0,2h$ os momentos ΔM_{sxt} e ΔM_{sxb} seriam nulos, concluindo-se então que quanto mais desniveladas estiverem as forças das armaduras e a resultante do bloco de tensões no betão maiores serão os momentos adicionais, pelo que sendo negligenciados poderão em determinados casos causar problemas.

Ainda no que respeita a esta questão dos momentos adicionais, há a tecer algumas apreciações que certamente revelam-se pertinentes: (i) o ΔM é calculado depois de efectuado o dimensionamento que se adopta correntemente; (ii) constata-se que o valor de ΔM , por exemplo da camada superior segundo a direcção x , depende exclusivamente das características da camada oposta no que toca ao valor de armadura N_{sxb} e à espessura da bielas comprimidas a_b , daí cada camada apresentar um valor de ΔM diferente uma das outras e, desse modo associar-se os momentos às camadas; (iii) verifica-se pelas expressões (2.25) que as espessuras das bielas comprimidas são em função dos momentos torsores, constatando desta forma que a_t e a_b serão aproximadamente iguais, não contribuindo assim para a diferença entre os ΔM na mesma direcção; (iv) assim os ΔM serão diferentes na mesma direcção consequência da diferença do valor de armadura a colocar nas respectivas camadas e pela resultante do bloco de tensões na camada no betão e de armadura estarem a um níveis diferentes.

Portanto, os efeitos dos momentos adicionais ΔM resultarão como consequência da localização das resultantes de armadura e do bloco de tensões nas bielas de betão para a mesma camada, superior ou inferior, estarem a níveis diferentes, intervindo também na ordem de grandeza dos ΔM , o valor de armadura.

No que toca a esta questão dos momentos adicionais, ela não será aqui novamente discutida (dado que a implementação baseada no EC2 não fala desse assunto) face a um dos objectivos da presente

dissertação, que passa pela exploração dos procedimentos preconizados pelo EC2 na determinação de armaduras em lajes de betão armado.

Sendo assim, as equações a utilizar para a determinação das armaduras em lajes são as apresentadas em (2.14), sendo que o procedimento de cálculo é iterativo, para o qual se apresentam os passos a efectuar:

- (I) Para a primeira iteração de cálculo assume-se que $a_t = a_b = 0,2h$ e $\theta_b = -\theta_t = \pi/4$.
- (II) Cálculo de N_{ct} e N_{cb} pelas equações (2.25).
- (III) Cálculo de f_{ct} e f_{cb} segundo (2.62)
- (IV) Compararam-se as tensões f_{ct} e f_{cb} com f_{cd2} . Se $(f_{ct} \vee f_{cb}) > f_{cd2}$ recalcula-se a_t ou a_b pelas expressões (2.3) e volta-se ao ponto (II).
- (V) Calculados a_t e a_b determinam-se os respectivos braços das forças internas, determinando as armaduras segundo as expressões (2.56) a (2.59).

Em anexo 1, exemplifica-se com vários exemplos o processo iterativo aqui apresentado, o qual foi também utilizado no programa desenvolvido neste trabalho, designado DesignSlab.

2.3. DISPOSIÇÕES DO MODELO CÓDIGO 90 – MC90

Segundo o MC90 o modelo aproximado para resistir aos esforços presentes em lajes é o “Modelo das três camadas” (“Three-layer Plate Model”), o qual consiste tal como o nome sugere, em dividir o elemento em três camadas, a designar – camadas exteriores (camada superior e inferior) e camada interior. Sendo que as camadas exteriores fornecem resistência para os efeitos no plano devido aos esforços de membrana e de flexão. Quanto à camada interior, esta assegura a transmissão do corte entre as camadas exteriores e, tem também como papel resistir ao esforço transversal. Como o presente trabalho trata de lajes, as camadas exteriores fornecem apenas resistência aos esforços de flexão.

Este mesmo código sugere que numa primeira análise dum elemento de laje sujeito aos momentos m_x e m_y , paralelos às direcções da armadura, a verificação à flexão deva ser feita segundo o artigo relacionado com os efeitos da acção axial (ver MC90, Cap. 6.3.2) e a verificação ao esforço de corte segundo o artigo relacionado com o corte em lajes (ver MC90, Cap. 6.4.2).

No entanto, na generalidade dos casos, as lajes estão sujeitas a momentos m_x , m_y e m_{xy} por unidade de comprimento. Logo, e segundo o MC90, a verificação deverá ser efectuada baseando-se num modelo no qual as camadas exteriores resistem aos efeitos do plano devido aos momentos, ou seja, como se tratasse de um elemento sujeito ao estado plano de tensão.

De facto, pode-se transformar os esforços de flexão em esforços de membrana dividindo os primeiros pelo respectivo braço, como de seguida será ilustrado na Figura 2.8.

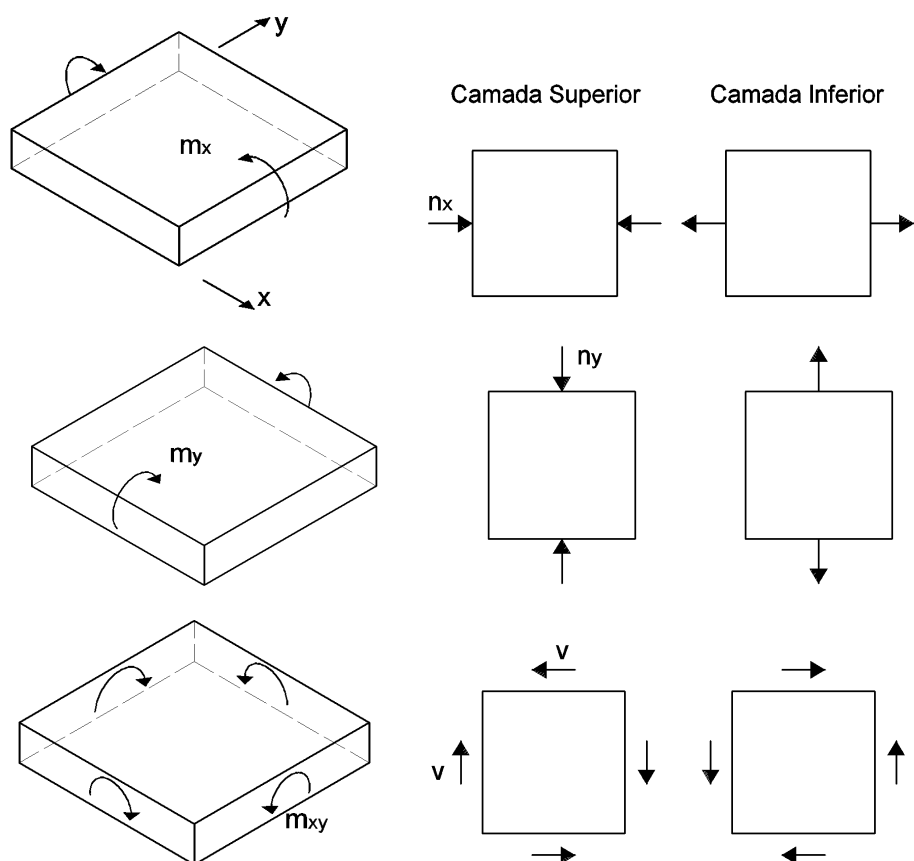


Fig. 2.8 - Forças nas camadas exteriores e interior devido aos momentos m_x , m_y e m_{xy}

No que diz respeito às forças de corte originadas pelos momentos torsores, observa-se na Figura 2.9 em elemento de laje, onde se ilustra o modelo de resistência a esses esforços.

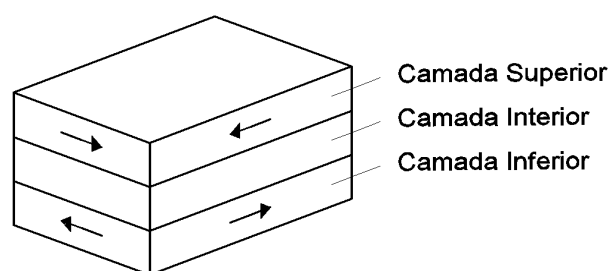


Fig. 2.9 – Exemplo do modelo de resistência aos momentos torsores

Também para os bordos livres das lajes, o MC90 preconiza algumas considerações a tomar como as de colocar armadura perpendicularmente ao bordo livre, de forma a haver uma maior área por unidade de comprimento, a qual deverá retornar na camada oposta na mesma direcção com o objectivo de prover também as camadas de resistência à torção. Assim, facilmente se percebe que utilizando armaduras em

U se materializaria esta solução evocada pelo MC90, a qual deve ser inserida nas camadas exteriores e sobreposta com a armadura superior e inferior de flexão, tal como ilustrado na Figura 2.10.

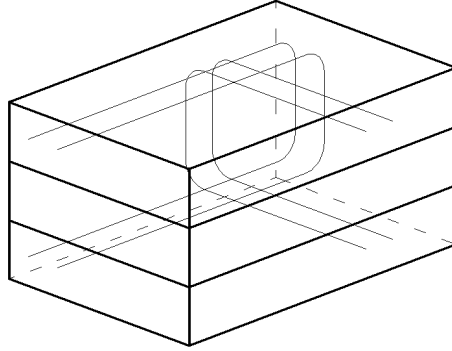


Fig. 2.10 – Armaduras em U para os bordos livres

Assim sendo, e como ilustrado na Figura 2.8, os efeitos nas camadas exteriores devido às cargas são expressos em momentos por unidade de comprimento, nas direcções paralelas à armadura, ou seja, aos eixos x e y . Admitindo como notação a apresentada no Código em estudo (MC90 – Cap. 6.4.1), vem que:

$$n_{Sdx} = m_{Sdx} / z_x \quad (2.100)$$

$$n_{Sdy} = m_{Sdy} / z_y \quad (2.101)$$

$$v_{Sdx} = m_{Sdxy} / z_{xy} \quad (2.102)$$

Onde:

z_x é o braço entre a força de tracção na armadura e força de compressão no betão na direcção x

z_y é o braço entre a força de tracção na armadura e a força de compressão no betão na direcção y

z_{xy} é o braço entre as forças de corte das camadas superior e inferior.

Ainda segundo o MC90, “uma aproximação para z_{xy} pode geralmente ser tomada como $2h/3$, onde h é a espessura da laje. Deve ser notado que na generalidade dos casos a dimensão z_x e z_y é a distância entre os centros das resultantes de compressão no betão e de tensão na armadura. A dimensão z_{xy} é sempre entre os centros das forças no betão.”

2.4. METODOLOGIA APRESENTADA PELO EUROCÓDIGO – EC2

O Eurocódigo 2 apresenta na actual versão expressões relativas às armaduras de tracção para tensões no próprio plano, não diferenciando o tipo de estrutura em questão. Neste sentido, tais expressões tem aplicabilidade tanto para paredes, lajes e cascas, ou seja, para estruturas laminares. No entanto, na anterior versão apresentava expressões simplificadas para lajes envolvendo esforços, que por sua vez não previa critérios de verificação das bielas de compressão desenvolvidas no betão.

Assim apresenta-se de seguida os dois métodos:

2.4.1. EUROCÓDIGO 2 – VERSÃO 1992

De acordo com esta versão, o método a seguir baseia-se na escolha de um sistema de eixos x-y, a que correspondem os momentos por unidade de comprimento m_x , m_y e m_{xy} , tais que $m_y \geq m_x$. Desta forma, armaduras para resistirem aos momentos últimos m_{udx} , m'_{udx} , m_{udy} e m'_{udy} deverão ser colocadas nas direcções x-y, em que m_{udx} e m_{udy} são momentos que produzem tracções na face inferior da laje e m'_{udx} e m'_{udy} produzem tracções na face superior da laje. Assim sendo, os momentos últimos deverão ser obtidos a partir dos valores de m_x , m_y e m_{xy} como de seguida se apresenta.

$$m_x \geq -|m_{xy}| \Rightarrow \begin{cases} m_{udx} = m_x + |m_{xy}| \\ m_{udy} = m_y + |m_{xy}| \end{cases} \quad (2.103)$$

$$m_x < -|m_{xy}| \Rightarrow \begin{cases} m_{udx} = 0 \\ m_{udy} = m_y + \frac{m_{xy}^2}{|m_x|} \end{cases} \quad (2.104)$$

$$m_y \leq |m_{xy}| \Rightarrow \begin{cases} m'_{udx} = -m_x + |m_{xy}| \\ m'_{udy} = -m_y + |m_{xy}| \end{cases} \quad (2.105)$$

$$m_y > |m_{xy}| \Rightarrow \begin{cases} m'_{udx} = -m_x + \frac{m_{xy}^2}{|m_y|} \\ m'_{udy} = 0 \end{cases} \quad (2.106)$$

De realçar o facto destas expressões não incluírem os efeitos de interacção entre as diferentes camadas de armadura e as resultantes de compressão no betão, conforme demonstrado por Gupta (1986).

2.4.2. EUROCÓDIGO 2 – VERSÃO 2004

Nesta versão actual, o Eurocódigo no Anexo F, define expressões segundo tensões e não segundo esforços, tal como a anterior versão apresentava. Na versão 2004, as armaduras de tracção num elemento sujeito a tensões ortogonais no próprio plano σ_{Edx} , σ_{Edy} e τ_{Edxy} podem ser calculadas utilizando o método que se indica a seguir:

- Considera-se $\sigma_{Edx} > \sigma_{Edy}$, em que as tensões de compressão são consideradas positivas;
- Se $\sigma_{Edx} > 0 \wedge \sigma_{Edy} > 0 \wedge \sigma_{Edx} \cdot \sigma_{Edy} > \tau_{Edxy}^2$ não são necessárias armaduras. No entanto, a tensão de compressão máxima no betão não deve ser superior a f_{cd} ;
- Se $\sigma_{Edy} < 0 \wedge \sigma_{Edx} \cdot \sigma_{Edy} \leq \tau_{Edxy}^2$ são necessárias armaduras;
- Para $\sigma_{Edx} \leq |\tau_{Edxy}| \Rightarrow \begin{cases} f'_{tdx} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edx} \\ f'_{tdy} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edy} \\ \sigma_{cd} = 2|\tau_{Edxy}| \end{cases}$
- Para $\sigma_{Edx} > |\tau_{Edxy}| \Rightarrow \begin{cases} f'_{tdx} = 0 \\ f'_{tdy} = \frac{\tau_{Edxy}^2}{\sigma_{Edx}} - \sigma_{Edy} \\ \sigma_{cd} = \sigma_{Edx} \left(1 + \left(\frac{\tau_{Edxy}}{\sigma_{Edx}} \right)^2 \right) \end{cases}$
- Obtidas as tensões f'_{tdx} e f'_{tdy} determinam-se as armaduras $\begin{cases} A_{sx} = \frac{f'_{tdx}}{f_{syd}} \cdot h \\ A_{sy} = \frac{f'_{tdy}}{f_{syd}} \cdot h \end{cases}$
- A tensão no betão, σ_{cd} , deve ser verificada.

Note-se que segundo o Anexo F da versão de 2004 do EC2, as resistências à tracção conferidas pelas armaduras são determinadas a partir de:

$$\begin{cases} f'_{tdx} = \rho_x \cdot f_{syd} \\ f'_{tdy} = \rho_y \cdot f_{syd} \end{cases}$$

em que ρ_x e ρ_y são as taxas geométricas de armaduras, segundo os eixos x e y . Assim sendo, as expressões f'_{tdx} e f'_{tdy} são tensões fictícias que existem nas áreas traccionadas, conduzindo a que as

expressões que permitem determinar o valor das armaduras A_{sx} e A_{sy} venham afectadas da correspondente camada traccionada h .

O procedimento em cima apresentado deve ser efectuado tanto para a camada superior e para a camada inferior. No que respeita à condição de não esmagamento do betão, segundo o Eurocódigo 2, existem duas situações distintas que determinam o cálculo da resistência à compressão do betão, como se ilustra de seguida:

- Zonas fendilhadas

O valor de cálculo da resistência à compressão do betão deve ser reduzido em zonas comprimidas fendilhadas, tal como ilustrado na Figura 2.11.

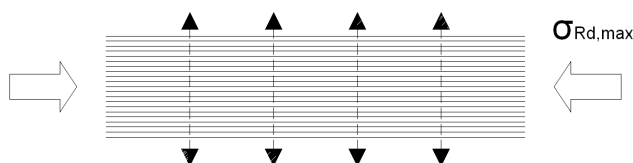


Fig. 2.11 – Visualização duma região fendilhada

Neste caso deve-se verificar $\sigma_{cd} \leq 0,6 \cdot \nu' \cdot f_{cd}$, com $\nu' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$

- Zonas não fendilhadas

O valor de cálculo da resistência à compressão do betão numa região com tensões de compressão transversal ou sem tensões transversais, como se observa na Figura 2.12, deve verificar $\sigma_{cd} \leq f_{cd}$

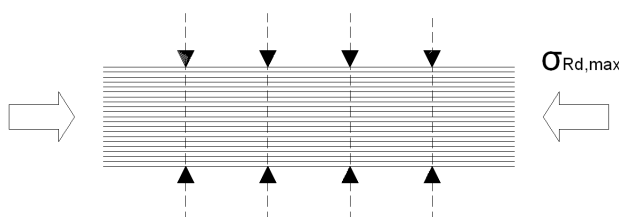


Fig. 2.12 – Visualização duma região não fendilhada

Realça-se, como já anteriormente referido, o facto de que o MC90 para zonas não fendilhadas diferir do EC2, sugerindo que $\sigma_{cd} \leq 0,85 \cdot \nu' \cdot f_{cd}$. O factor 0,85 está relacionado com a limitação de tensões elevadas e o factor $\nu' = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$ está directamente relacionado com os betões de alta resistência, os quais apresentam curvas de resistência à compressão com uma rápida queda

a partir do ponto onde atingem o seu máximo valor. Com o intuito de precaver esse aspecto, o MC90 sugere a utilização daqueles factores.

2.5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No que toca a este capítulo, para o qual se pretendia expor toda a metodologia base das expressões apresentadas pelo EC2, dado que o programa desenvolvido DesignSlab é baseado nos procedimentos recomendados pelo EC2, há algumas apreciações a considerar.

Em primeiro lugar, constata-se que todo o procedimento desenvolvido inicialmente por Gupta é a base das metodologias sugeridas por alguns códigos internacionais tais como o MC90 e o EC2, sendo denominado por “Modelo das Três Camadas”.

Em segundo, com a dedução das expressões relacionadas com os momentos adicionais ΔM , compreendeu-se a origem desses esforços, os quais existirão como consequência da localização das resultantes de armadura e do bloco de tensões nas bielas de betão para a mesma camada, superior ou inferior, estarem a níveis diferentes. Verificou-se também que o valor da armadura intervém na ordem de grandeza dos ΔM , tal como previsto pelas expressões (2.86) e (2.87).

Constatou-se também que as expressões (2.86) e (2.87) assumem valores diferentes uma das outras, levando a associar momentos pelas respectivas camadas, superior ou inferior, segundo as direcções x ou y . As razões para essas diferenças são as que se proferiram para a justificação do aparecimento dos momentos adicionais, sendo que apesar das espessuras a_t e a_b também constarem nas expressões (2.86) e (2.87), observou-se que não contribuem para essa diferença, pelo facto de dependerem exclusivamente dos momentos torsores, ver expressões (2.25), o que conduzirá a valores de a_t e a_b muito próximos.

Dado que a implementação baseada no EC2 não fala desse assunto e, portanto, face a um dos objectivos da presente dissertação, que passa pela exploração dos procedimentos preconizados pelo EC2 na determinação de armaduras em lajes de betão armado, não se desenvolverá mais este assunto no decorrer da presente dissertação.

No entanto, seria interessante em futuros trabalhos a aplicação duma ferramenta que incorporasse os momentos adicionais que Gupta prevê, de forma a comparar resultados com e sem esse efeito, e consequentemente alertar, se fosse caso disso, para as situações que não deveriam ignorar esse efeito.

Constatou-se que as expressões f'_{idx} e f'_{idy} preconizadas no Anexo F da versão de 2004 do EC2 são tensões fictícias que existem nas áreas traccionadas, ou seja, nas camadas superior ou inferior, sendo portanto definidas pela percentagem de armadura multiplicada pela tensão de cálculo de cedência da armadura. Assim, consequentemente, as expressões que permitem determinar o valor das armaduras A_{sx} e A_{sy} vêm afectadas da correspondente camada traccionada h .

3

CÓDIGO DESENVOLVIDO PARA DIMENSIONAMENTO DE ARMADURAS EM LAJES

3.1. INTRODUÇÃO

O cálculo automático de armaduras em elementos estruturais é hoje em dia uma realidade, devido à grande proliferação dos computadores que possibilitaram o desenvolvimento de programas que permitem a obtenção rápida de resultados. Deste modo, o presente trabalho enquadra-se nesta perspectiva, uma vez que o principal objectivo passa pelo desenvolvimento de um programa que a partir dos esforços actuantes nas lajes obtidos por um programa de análise pelo MEF, se determinem automaticamente as armaduras nessas estruturas.

Assim sendo, neste capítulo visa-se a apresentação do programa desenvolvido para o dimensionamento de armaduras em lajes submetidas a campos de momentos genérico. Este programa, designado DesignSlab foi desenvolvido na linguagem Matlab, no qual se desenvolveu um interface gráfico que permite ao utilizador a introdução da geometria da laje e dos materiais betão e aço. Posteriormente, essa informação será processada juntamente com os resultados da análise pelo MEF, aplicando-se o EC2 como metodologia para a obtenção das armaduras nas lajes, sendo finalmente exportadas as distribuições de armaduras nas lajes e das tensões de compressão nas bielas de betão.

Quanto à análise pelo MEF, que no presente trabalho foi efectuada pelo programa Robot Millennium, os resultados a fornecer ao programa DesignSlab são os momentos flectores e torsores actuantes nas lajes, bem como as coordenadas dos nós dos elementos finitos utilizados na discretização.

Entre a utilização do programa Robot Millennium e do programa DesignSlab recorre-se ainda ao programa Excel, para o qual serão exportadas as tabelas dos esforços anteriormente referidos.

De forma a visualizar o que o programa DesignSlab efectua, apresenta-se na parte final deste capítulo a aplicação a um caso de estudo, para o qual se ilustram as distribuições de armaduras e das tensões de compressão nas bielas de betão.

Por fim, termina-se o presente capítulo com as considerações mais pertinentes.

3.2. UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO DESIGNSLAB

Para a escrita de um código computacional existem vários tipos de linguagem e de ferramentas de programação, dentre os quais se inclui o Matlab – MATrix LABoratory, a partir do qual se desenvolveu o algoritmo de cálculo automático DesignSlab.

O Matlab é um programa com grandes capacidades para efectuar cálculos científicos com grande aplicação na área da engenharia. Este programa apresenta uma vasta gama de funções predefinidas, a partir das quais a programação pode ser desenvolvida de uma forma mais simplificada, o que torna este sistema computacional mais flexível, de fácil utilização e vantajoso em relação a outras linguagens de programação.

O funcionamento do programa DesignSlab passa essencialmente pela utilização do Matlab, mas previamente é necessário recorrer a uma análise elástica linear de lajes pelo MEF (por exemplo pelo programa comercial Robot Millennium), de forma a obter os esforços actuantes na estrutura – momentos flectores e torsores. Esta informação é posteriormente utilizada pelo programa DesignSlab, a partir da qual se obterão representações gráficas com quantidades de armadura a dispor ortogonalmente nas lajes e as verificações das compressões no betão.

Os passos a efectuar para a obtenção destas distribuições de armaduras a partir do programa DesignSlab são ilustrados de seguida (ver igualmente a Figura 3.1):

- I. Análise linear elástica pelo MEF no Robot Millennium;
- II. Exportação para folhas de Excel dos momentos M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} , dos elementos finitos e das coordenadas dos nós dos elementos finitos;
- III. Leitura das folhas de Excel pela ferramenta apresentada;
- IV. Determinação das quantidades de armadura A_{sxt} , A_{syt} , A_{sxb} e A_{syb} , e verificação do esmagamento do betão.
- V. Ilustração das quantidades de armadura necessária e das tensões no betão em mapas.

No que respeita ao Excel, salienta-se o facto da utilização deste programa consistir simplesmente na exportação dos dados em folhas com o nome que o Matlab está preparado para ler, sendo depois unicamente necessário gravar essas folhas em ficheiro “Livro do Microsoft Office Excel”, como mais adiante será explicado.

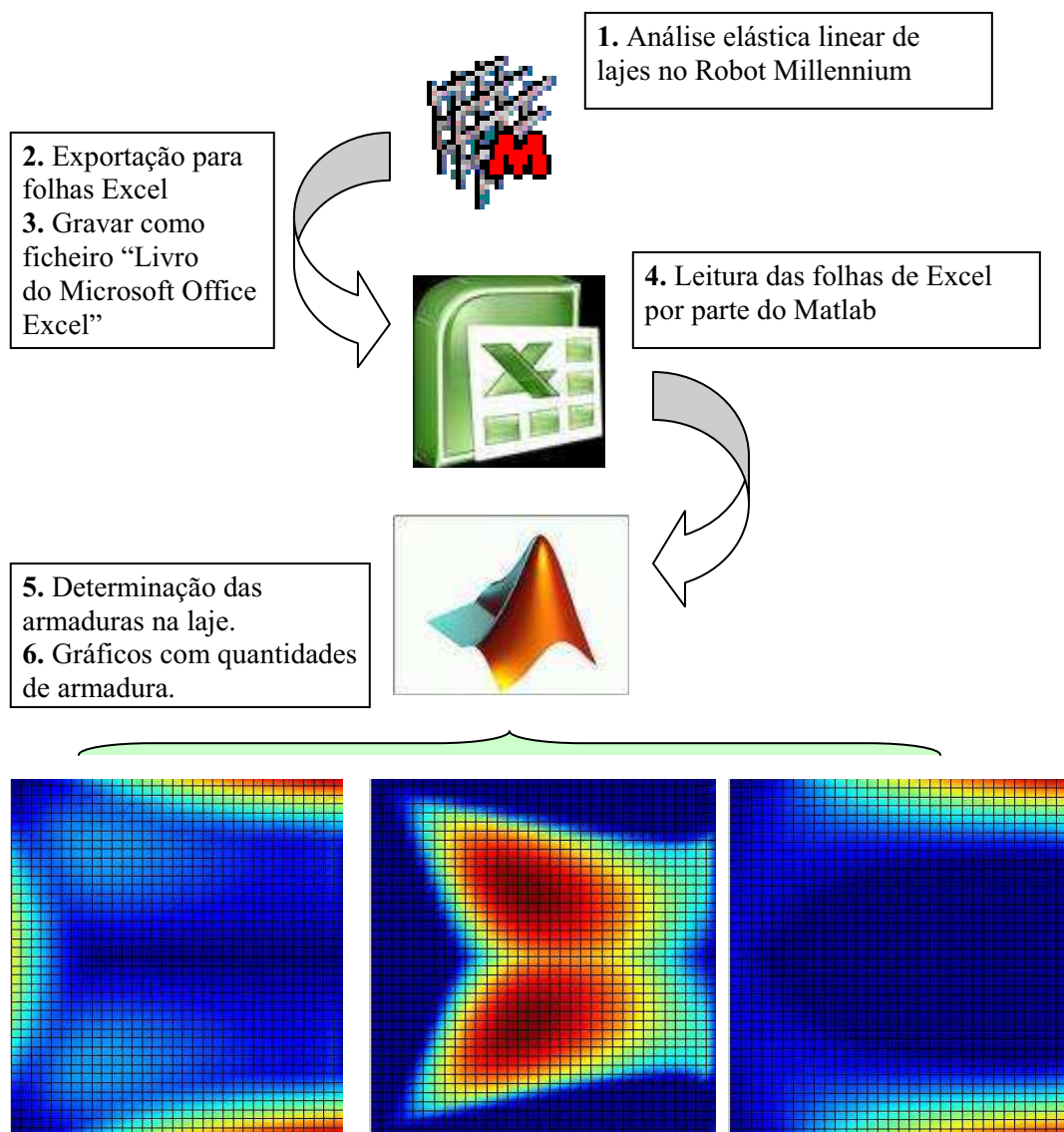


Fig.3.1. – Procedimento da ferramenta DesignSlab

3.3. FLUXOGRAMA DO PROGRAMA DESIGNSLAB

No desenvolvimento do programa DesignSlab foi adoptado um fluxograma de programação simples, tendo como base os critérios do EC2. O algoritmo começa pela introdução das características dos materiais e da geometria da laje em estudo, sendo depois esta informação utilizada para o cálculo das tensões, da quantidade de armaduras a dispor na estrutura e verificação das tensões de compressão nas bielas de betão.

O algoritmo desenvolvido, à imagem do procedimento sugerido por Gupta ilustrado no Capítulo 2, foi baseado num método iterativo, para determinar as espessuras das camadas comprimidas de betão, por forma a verificar as condições de esmagamento do betão descritos no EC2. Calculados deste modo a_t

e a_b , determinam-se as armaduras necessárias. De forma a descrever o método iterativo, apresenta-se uma breve apresentação do funcionamento do algoritmo num fluxograma:

1. Introdução dos dados no interface do programa. Quanto à geometria introduz-se a espessura da laje e no que respeita aos materiais introduzem-se o tipo de betão e aço. Ou seja, faz-se a introdução de h , f_{ck} e f_{syd} .
2. Leitura por parte do DesignSlab das folhas de Excel referentes aos momentos M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} .
3. A partir da espessura da laje h admiti-se $a_t = a_b = 0,2h$ e $\theta_t = \theta_b = \pm \pi/4$.
4. Faz-se $old a_t = a_t$ e $old a_b = a_b$. Determina-se $z = h - (a_t + a_b) / 2$
5. Cálculo das tensões

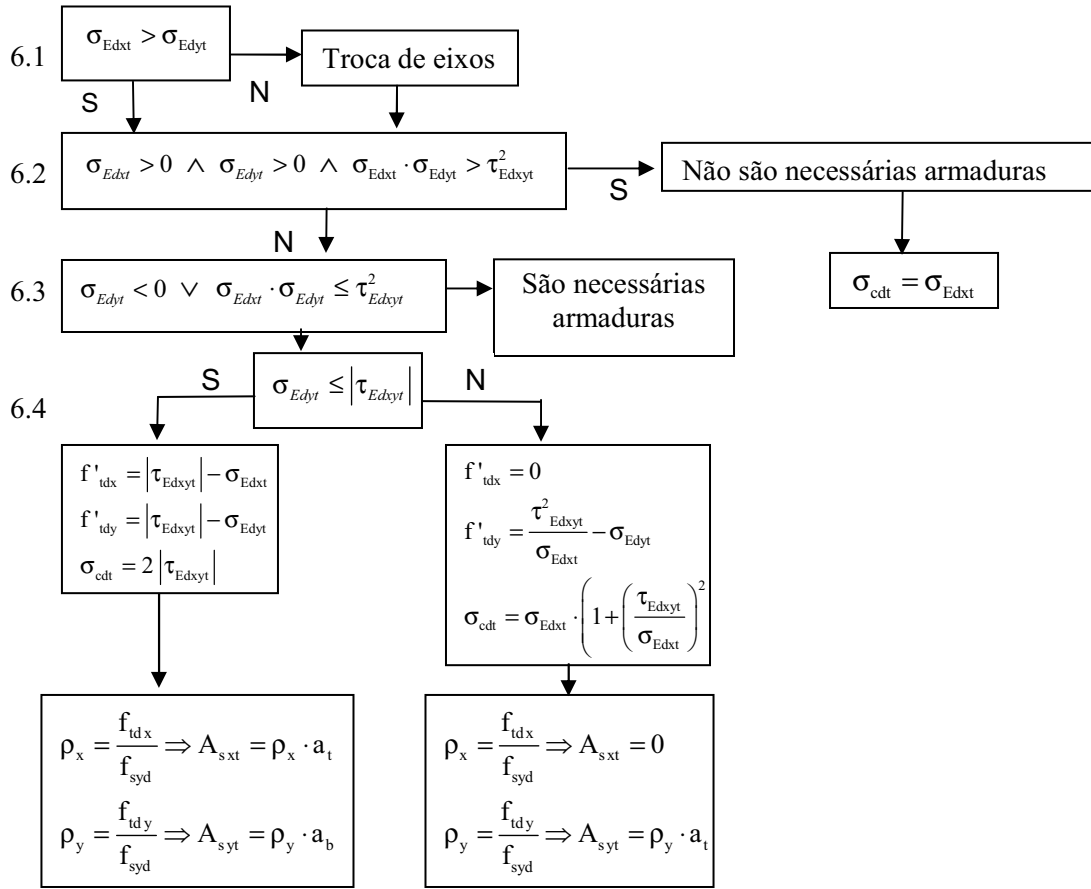
$$\text{- Camada superior: } \sigma_{Edxt} = -\frac{M_{xx}}{z \times a_t}; \sigma_{Edyt} = -\frac{M_{yy}}{z \times a_t}; \tau_{Edxyt} = \frac{M_{xy}}{z \times a_t}$$

$$\text{- Camada inferior: } \sigma_{Edxb} = \frac{M_{xx}}{z \times a_b}; \sigma_{Edyb} = \frac{M_{yy}}{z \times a_b}; \tau_{Edxyt} = \frac{M_{xy}}{z \times a_b}$$

Nota: Segundo o EC2, as tensões de compressão são consideradas positivas, logo como os momentos flectores negativos fornecidos pelo Robot Millennium são positivos, para o cálculo das tensões normais na camada superior trocou-se o respectivo sinal.

6. Aplicação do EC2

Em termos de dimensionamento das armaduras, apresenta-se o tratamento para a camada superior. Para a camada inferior aplica-se procedimento análogo.



Neste fluxograma as siglas S e N representam “Sim” e “Não”, respectivamente.

6.5 Exportação dos mapas de armaduras e das compressões no betão.

Os subscritos *t* e *b* estão associados às camadas superior (top) e inferior (bottom), respectivamente.

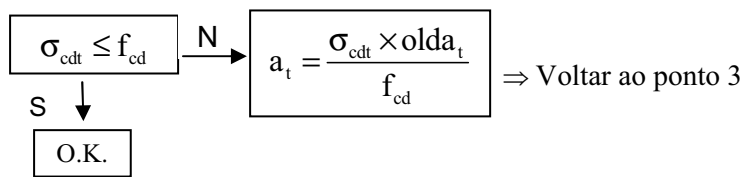
O fluxograma acima ilustrado é de fácil interpretação. Os pontos 1, 2 e 3 são de fácil compreensão aquando da sua leitura, não sendo por isso necessário proferir explicações complementares. No que toca ao ponto 4, é feita, antes de executar cada iteração, uma prévia gravação das espessuras das camadas de compressão de betão nas variáveis $old a_t$ e $old a_b$, de forma a que caso não se verifique os critérios de não esmagamento do betão, possa-se calcular um novo a_t e a_b com base nessas variáveis. No que respeita a esta questão do ponto 4, é detalhadamente explicada aquando da apresentação do fluxograma da verificação das tensões no betão a seguir apresentado.

De seguida, o programa para cada nó dos elementos finitos lê as três tensões calculadas no ponto 5. Depois, dado que a metodologia do EC2 considera que sempre $\sigma_{Edxt} > \sigma_{Edyt}$, então o programa faz essa verificação para cada nó (ver o ponto 6.1). Se não verificar efectua uma troca de eixos, passando σ_{Edyt} a ser σ_{Edxt} e σ_{Edxt} a ser σ_{Edyt} . Considerando o EC2 que as tensões de compressão são consideradas positivas, faz-se então de seguida a verificação preconizada no ponto 6.2. Se se verificar calcula-se a tensão no betão e não são necessárias armaduras. Se não se verificar passa-se para a verificação 6.3,

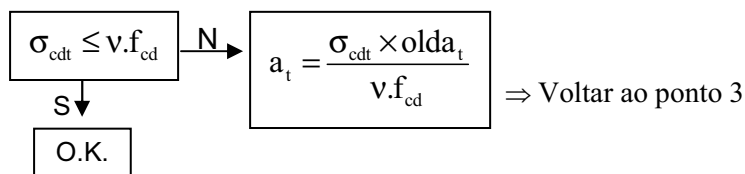
para a qual são necessárias armaduras. A determinação das armaduras será efectuada em função da verificação 6.4, que determina dois caminhos para o cálculo das armaduras.

Quanto à verificação da condição de não esmagamento do betão apresenta-se fluxograma seguinte, o qual é aplicado nos pontos 6.2 e 6.4 depois de calculadas as tensões no betão.

- i) No caso de não serem necessárias armaduras – Compressão bi-axial



- ii) No caso de serem necessárias armaduras



Nota: Enquanto $|olda_t - a_t| > 0.0005 \Rightarrow$ Voltar ao ponto 3

Esta verificação das tensões no betão está correlacionada com o ponto 4. Assim, e no seguimento das considerações já proferidas, exemplifica-se para o caso da camada superior no que toca ao processo iterativo. Admite-se que inicialmente $olda_t = a_t = 0,2h$ procedendo-se à verificação das tensões no betão. Caso as tensões no betão ultrapassem o valor limite, não verificando-se desta forma o critério de não esmagamento do betão, calcula-se um novo $a_t = \frac{\sigma_{cd} \times olda_t}{f_{cd2}}$, para o caso do valor limite da compressão no betão ser f_{cd2} . Repare-se que na próxima iteração o valor de a_t é superior ao anterior, tornando-se a gravar na variável $olda_t$ este novo valor de a_t , repetindo-se o procedimento até verificar uma determinada tolerância, que para o algoritmo desenvolvido adoptou-se o valor 0,05%, ou seja, enquanto $|olda_t - a_t| > 0.0005$ repete-se o procedimento descrito. Note-se que caso na primeira iteração o valor de a_t seja suficiente para se verificar o critério da tensão no betão, entra-se no processo iterativo inverso ao referido no caso de não se verificar as tensões, calculando-se sucessivos valores inferiores ao admitido para a primeira iteração de a_t , até se verificar a tolerância, optimizando desta forma cada nó dos elementos finitos.

3.4. BREVE ABORDAGEM AOS ELEMENTOS FINITOS

Não sendo objectivo de estudo prioritário do presente trabalho, é oportuno fazer uma breve referência ao tipo de elemento aqui utilizado e à forma de obtenção dos resultados pelo Programa Robot Millennium.

Como o próprio nome indica, o Método dos Elementos Finitos baseia-se na divisão da estrutura em várias estruturas elementares de dimensões bastante mais reduzidas. Estes elementos finitos são definidos pelos seus nós, nos quais se pretende conhecer explicitamente o campo de deslocamentos, sendo que para os restantes pontos do elemento finito os deslocamentos se obtêm por interpolação daqueles. No entanto, muitos dos integrais que é necessário calcular no âmbito da aplicação do MEF não são triviais, o que leva a recorrer a técnicas de integração numérica, sendo a mais utilizada a Quadratura de Gauss. Para o presente trabalho serão utilizados elementos finitos de 8 nós, nos quais com as integrações completa e reduzida estão envolvidos 9 e 4 pontos de Gauss, respectivamente, ilustrados na Figura 3.2.

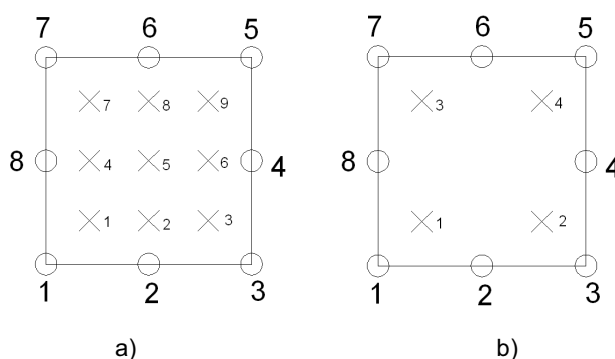


Fig. 3.2 – Tipo de elemento finito e visualização dos pontos de Gauss; a) Integração completa; b) Integração reduzida

A melhor aproximação para os esforços nas lajes são obtidos nos pontos de Gauss. No entanto o Robot Millennium fornece os resultados nos 8 nós do elemento finito, os quais são obtidos por extrapolação através dos resultados nos 9 ou 4 pontos de Gauss, dependendo do tipo de integração. Por conseguinte, estes resultados obtidos nos nós apresentam erros superiores aos correspondentes nos pontos de integração.

Realça-se o facto de que no caso do programa Robot Millennium, não se conhece que tipo de integração é usada, dificultando dessa forma, uma melhor avaliação dos resultados obtidos nos nós dos elementos finitos.

3.5. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO – DESIGNSLAB

3.5.1. PROCEDIMENTO NO ROBOT MILLENNIUM

Depois de efectuada a análise elástica linear no Robot Millennium, procede-se à exportação das tabelas referentes aos esforços actuantes na laje, momentos flectores e torsores, das coordenadas dos nós dos elementos finitos e dos elementos finitos, para serem posteriormente utilizadas pelo programa DesignSlab. Assim sendo, no menu “View” na barra de ferramentas do programa Robot Millennium, selecciona-se “Tables”, como ilustrado na Figura 3.3.

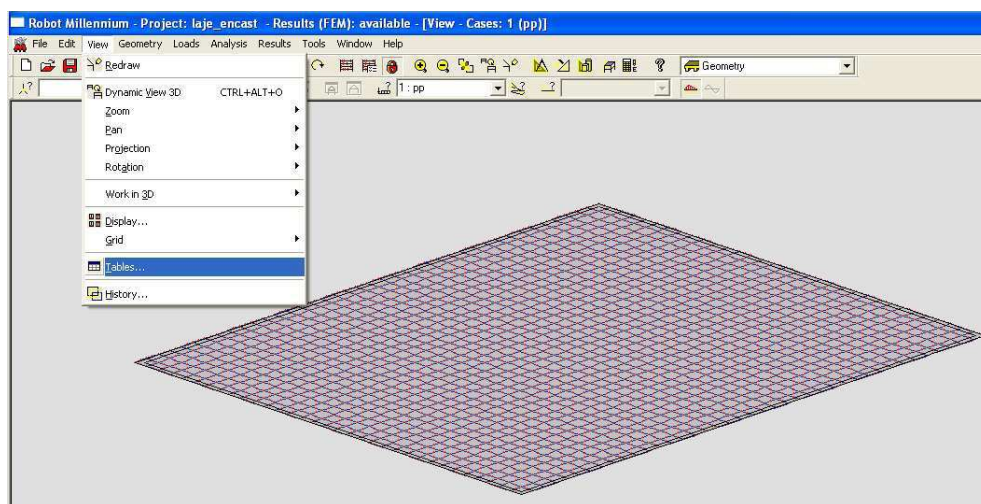


Fig. 3.3. – Selecção na barra de ferramentas da opção para obtenção das tabelas – “View”, “Tables”

De seguida, abre-se uma janela designada por “Tables: Data and Results”, onde se selecciona as opções “Nodes”, “Plates and Shells” e “Results for Plates and Shells”, as quais permitirão a obtenção das tabelas anteriormente mencionadas, como se verifica na Figura 3.4.

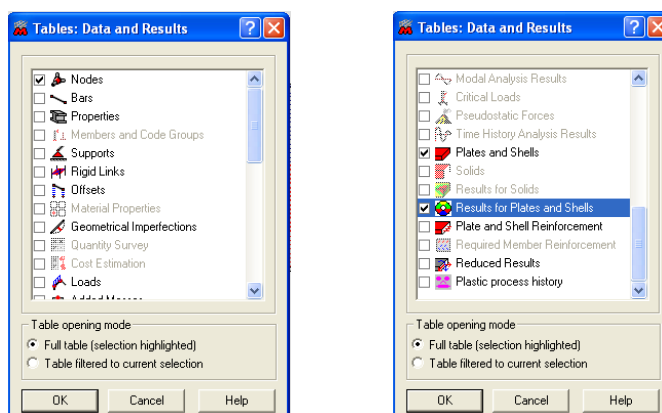


Fig. 3.4. – Opções a escolher no “Tables: Data and Results” para visualizar as tabelas pretendidas

Efectuada a selecção daquelas tabelas, verifica-se no canto inferior esquerdo o aparecimento de três ícones correspondentes à escolha anteriormente efectuada, tal como se ilustra na seguinte Figura 3.5.



Fig. 3.5. – Visualização no canto inferior esquerdo das três tabelas

A partir deste ponto estão disponíveis as tabelas dos momentos flectores e torsores, das coordenadas dos elementos finitos e dos elementos finitos, necessárias para exportar para Excel, sendo que para tal, basta seleccionar a tabela pretendida no canto inferior esquerdo, como ilustrado na Figura 3.5, e clicar no botão direito do rato seleccionando “Conversion to EXCEL (CSV) format”, tal como se observa na Figura 3.6.

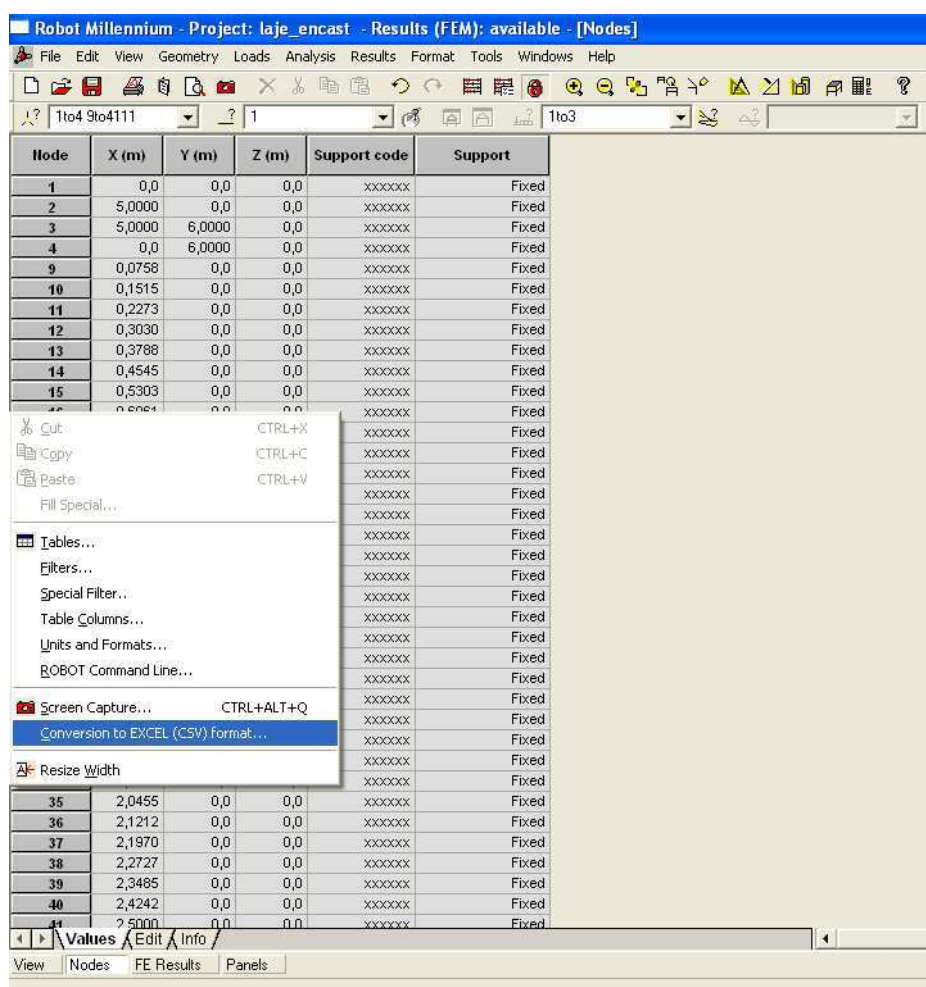


Fig. 3.6. – Exportação da tabela referente às coordenadas dos nós dos elementos finitos

Salienta-se o facto de ao efectuar a exportação das coordenadas dos nós dos elementos finitos ser necessário verificar que está seleccionada a opção “Values”, como se constata no canto inferior esquerdo da Figura 3.6. De seguida, no procedimento de exportação de cada uma das tabelas, abre-se uma janela onde se escolhe o directório onde se pretende gravar o ficheiro, como se observa na Figura 3.7.

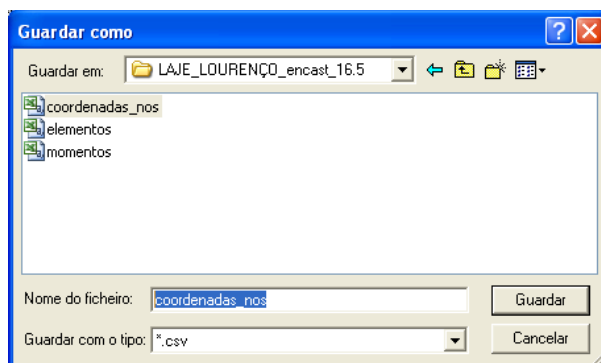


Fig. 3.7. – Gravação da tabela referente às coordenadas dos nós dos elementos finitos

No que toca às outras tabelas aplica-se o mesmo procedimento aqui apresentado para a tabela “Nodes”, a qual será guardada com o nome “coordenadas_nos” num ficheiro Excel mas com formato “*.csv”, como se constata na Figura 3.7, acima ilustrada. Quanto à tabela “Finite Elements”, a qual também deverá estar na opção “Values” como se verificou para a tabela “Nodes”, dever-se-á guardar como o nome “momentos”. No que respeita à tabela “Panels”, a opção a escolher deverá ser “Finite Elements” de forma a se exportar a tabela referente aos nós pertencentes a cada elemento finito.

Realça-se também o facto de que estes ficheiros deverão ser colocados no mesmo directório que o programa DesignSlab. Note-se que depois destes ficheiros serem gravados, deverão ser abertos e posteriormente guardados como “Livro do Microsoft Office Excel” de forma a poderem ser lidos pelo programa DesignSlab, tal como ilustrado na Figura 3.8, para o caso da tabela “coordenadas_nos”.

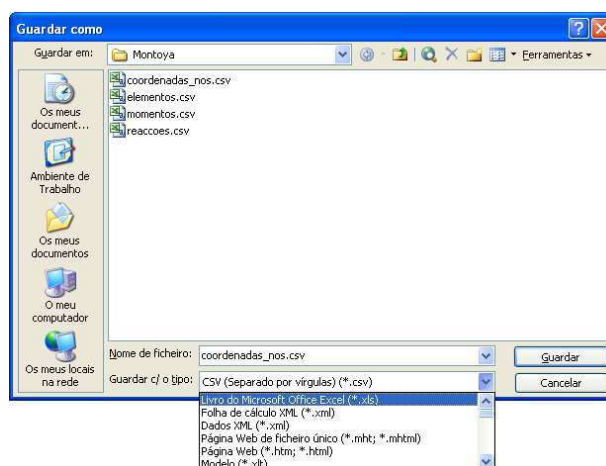


Fig. 3.8. – Gravação da tabela referente às coordenadas dos nós dos elementos finitos

Repare-se que para o exemplo da tabela “Nodes” o nome do ficheiro é “coordenadas_nos”, pois é o nome que foi adoptado no programa DesignSlab para a sua leitura. Assim sendo, no que respeita às outras tabelas as designações a adoptar para as tabelas “Panels” e “FE Results” deverão ser “elementos” e “momentos”, respectivamente.

3.5.2. APRESENTAÇÃO DO INTERFACE GRÁFICO DO PROGRAMA DESIGNSLAB

Após a análise elástica linear no Robot Millennium e a respectiva exportação das tabelas já devidamente analisado anteriormente, está-se em condições de utilizar a programa DesignSlab.

Tal como se ilustra na Figura 3.9, há uma escolha prévia das características da geometria e dos materiais, o que levará a resultados que podem não verificar alguns critérios, ou verificando, poderão não ser os desejados pelo utilizador. Face a uma possível situação deste género, seria de todo oportuno a utilização de um interface que permitisse um rápido reajuste das características acima mencionadas, de forma a tentar outras soluções, caso a inicialmente utilizada não satisfaça os objectivos pretendidos pelo utilizador.

Assim sendo, na utilização deste programa o utilizador é deparado com um painel interactivo destinado à introdução das características da geometria, dos materiais a adoptar e com um botão de execução do programa, designado por “Calcular Laje”.

Para se obter o painel interactivo, tem-se que correr o ficheiro m-file, com o nome DesignSlab, no programa Matlab, tal como se constata na Figura 3.9.

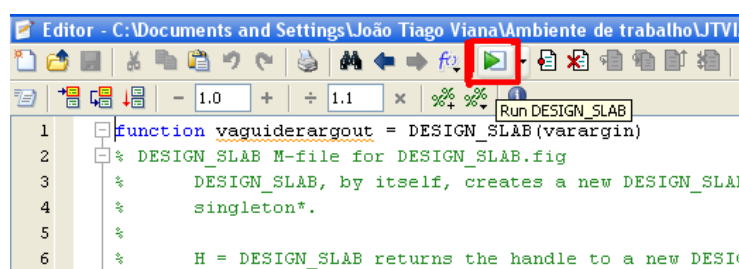


Fig. 3.9. – Opção para correr o programa – “Run DesignSlab”

O painel interactivo descrito ilustra-se na Figura 3.10.



Fig. 3.10. – Painel interactivo da ferramenta DesignSlab

Nas opções “Materiais” e “Espessura da Laje” escolhem-se os materiais e introduz-se a espessura da laje previamente estudada no Robot Millennium. No que toca à opção “Materiais”, pode-se escolher o tipo de betão e aço, ao passo que a outra opção destina-se à introdução da espessura h da laje analisada.

Realça-se o facto de que caso não se verificar a condição $(a_t + a_b) < h$, o programa alertará o utilizador com a mensagem ilustrada na Figura 3.11, tendo deste modo, de reajustar os parâmetros inicialmente introduzidos no painel interactivo, de forma a verificar a condição acima apresentada ou proceder a novo pré-dimensionamento da laje.

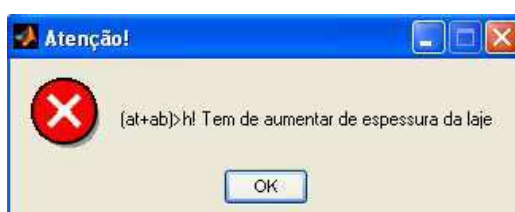


Fig. 3.11 – Caixa de diálogo

Em seguida, para proceder ao cálculo e obtenção da quantidade de armaduras, clica-se em “Calcular Laje”, que irá executar o programa, ou seja, ler os dados nas folhas de Excel referentes à análise elástica linear e, com os dados introduzidos no interface gráfico irá proceder ao cálculo das tensões, aplicar o EC2, fazer verificações e exportar mapas com quantidades de armadura na laje em estudo.

De forma a constatar as apreciações atrás referidas, apresenta-se a aplicação a um exemplo, sem entrar em grandes pormenores dado que este mesmo exemplo será devidamente analisado no Capítulo 4. Na Figura 3.12 ilustra-se uma laje encastrada em três lados com um bordo livre, de dimensões $5.0 \times 6.0 \text{ m}^2$, com uma espessura de 0,15 m, sujeita a uma acção de cálculo de 15 kN/m^2 , incluindo o peso próprio, sendo os materiais utilizados o betão C20/25 e o aço S400.

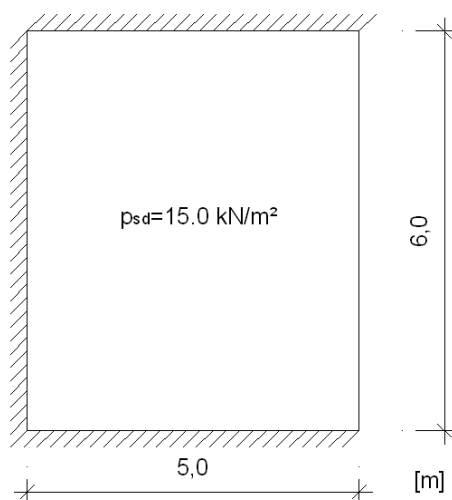
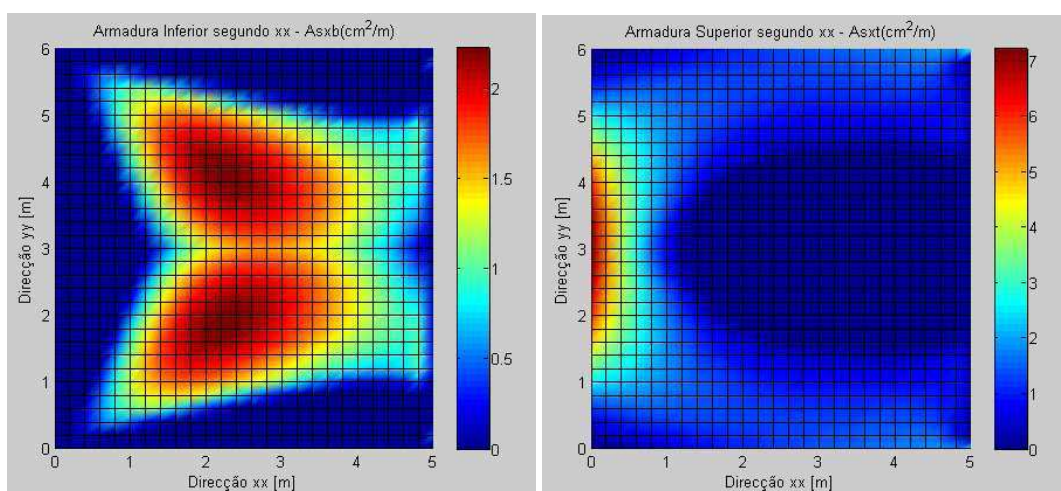


Fig. 3.12. – Representação da laje

Na Figura 3.13 (a) e b) pode-se constatar os resultados que o programa DesignSlab permite obter considerando o caso de estudo da laje apresentada na Figura 3.12, ou seja, podem-se visualizar as distribuições de armaduras necessárias. Nestas figuras constata-se que as zonas com maior necessidade de armadura são os bordos encastrados no que toca à camada superior, como seria de esperar, e central, principalmente junto ao bordo livre, no que toca à camada inferior. Como no Capítulo 4 se observará, estas zonas estão em correspondência com as zonas de maior presença de momentos flectores, os quais se verificaram como predominantes na análise estrutural. Por sua vez, os momentos torsores apresentam com pouca importância, influenciando um pouco a zona dos cantos na camada inferior, mas sem relevo no que toca ao dimensionamento.

Também no que respeita às tensões de compressão nas bielas de betão, o programa DesignSlab permite a visualização das distribuições dessas tensões, tanto na camada superior como na camada inferior, tal como se apresentam na Figura 3.13c) para a laje em estudo.



a)

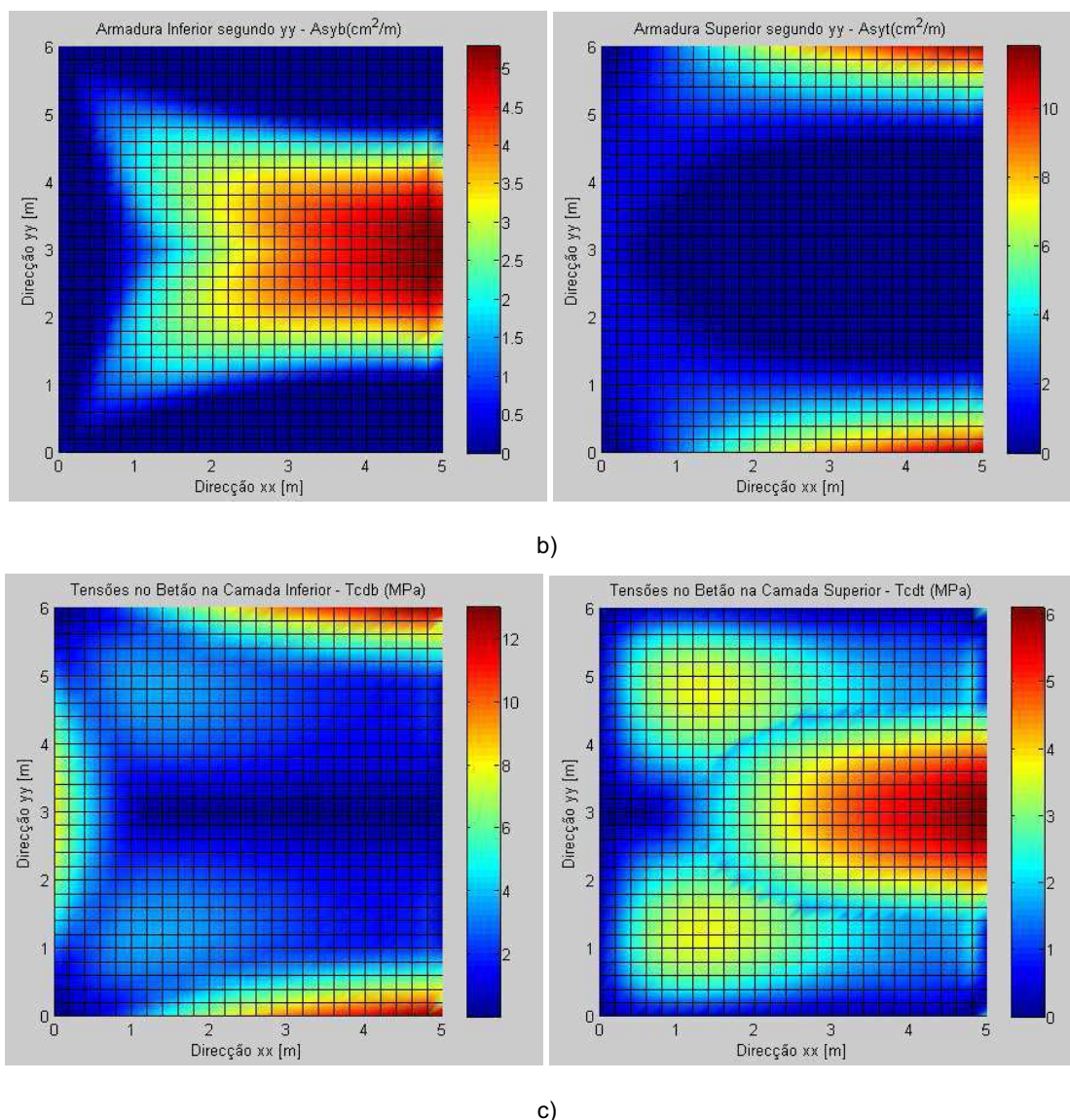


Fig. 3.13 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y; c) Tensões no betão

Analisando a Figura 3.13c), observar-se-á que as bielas mais comprimidas localizam-se nos bordos encastrados, para a camada inferior, e na zona central junto ao bordo livre, para a camada superior. Repare-se que estas zonas estão em correspondência com as mesmas indicadas como as de maior necessidade de armadura, verificando apenas tratar-se das camadas opostas, o que faz sentido tendo presente o efeito dos momentos. Outro aspecto a salientar prende-se com o facto de o nível dos esforços constatados ser diferente para a camada inferior e superior, justificado pelo facto de perante compressão bi-axial o limite das tensões no betão ser f_{cd1} e, nos restantes casos ser f_{cd2} . Sendo assim, nos bordos encastrados têm-se o betão comprimido bi-axialmente na camada inferior e, na zona central junto ao bordo livre tem-se o betão comprimido na camada superior segundo uma direcção e provavelmente sujeito a tracções transversais na direcção normal.

3.6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo pretendeu-se apresentar o programa DesignSlab, de forma clara e concisa demonstrando as suas potencialidades. Deste modo, verificou-se que a utilização do programa DesignSlab baseia-se na utilização de três programas – Robot Millennium, Excel e Matlab. Em termos práticos, o utilizador faz uma análise elástica linear no primeiro, exportando para folhas de Excel as tabelas dos esforços actuantes na laje, dos elementos finitos e das coordenadas dos nós destes, as quais terá de regravar noutro tipo de ficheiro, como já devidamente exposto, e correr o programa DesignSlab no Matlab, obtendo dessa forma, distribuições de armaduras a colocar na laje respectivas tensões nas bielas de compressão de betão.

Na utilização do programa DesignSlab, salienta-se a facilidade de reajustar parâmetros relacionados com os materiais e geometria da estrutura, de forma a obter-se os resultados pretendidos.

De notar também que todo este procedimento é efectuado tendo como base uma análise elástica linear das estruturas em causa.

4

EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DESENVOLVIDO

4.1. INTRODUÇÃO

No presente capítulo procede-se à análise de vários exemplos devidamente estudados segundo a metodologia de Gupta, os quais são também analisados pelo programa DesignSlab desenvolvido no presente trabalho, de forma a validar este código. Posteriormente, e ainda neste capítulo, são também alvo de análise dois exemplos estudados por Lourenço (1992), aproveitando-se para confrontar os resultados numa perspectiva de validação do programa desenvolvido.

A análise destes exemplos tem como objecto a determinação da quantidade de armaduras em lajes e verificação das tensões máximas no betão pelo programa DesignSlab, e posterior validação desses resultados reportados em Lourenço (1992)

4.2. EXEMPLOS

No Anexo A.1 são apresentados cinco exemplos analisados segundo a metodologia de Gupta, bem como pela metodologia aplicada no código computacional DesignSlab. No presente subcapítulo apresentam-se os resultados para o primeiro exemplo, no qual se ilustra um elemento sujeito a um campo de momentos genérico.

Realça-se o facto de que na aplicação do programa DesignSlab o braço entre as forças da armadura e do betão, z , é diferente do homólogo utilizado por Gupta, e posteriormente por Lourenço, pois como discutido no Capítulo 2 podem ocorrer braços diferentes entre as armaduras e o betão, z_x e z_y , utilizados para o cálculo das tensões normais segundo as direcções x e y , respectivamente e, z_c , utilizado para o cálculo das tensões de corte. No entanto a diferença entre eles não se revela importante, pelo que foi adoptado no código computacional um único $z = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right)$, o qual coincide com o z_c , usado por Gupta para o calculo das tensões de corte.

A modelação dos exemplos foi realizada no Robot Millennium com recurso ao MEF, utilizando elementos quadrangulares de oito nós com dimensões de $0.2 \times 0.2 \text{ m}^2$.

4.2.1. EXEMPLO 1 – ELEMENTO SUJEITO A UM CAMPO DE MOMENTOS GENÉRICO

Na Figura 4.1 apresenta-se um elemento de laje de dimensões $1 \times 1 \text{ m}^2$ e espessura $0,20 \text{ m}$, realizado em betão C20/25 e aço S400. Admitem-se os seguintes esforços:

- $M_x = 30 \text{ kN.m/m}$
- $M_y = -20 \text{ kN/m}$
- $M_{xy} = 25 \text{ kN/m}$

os quais se podem visualizar na Figura 4.1.

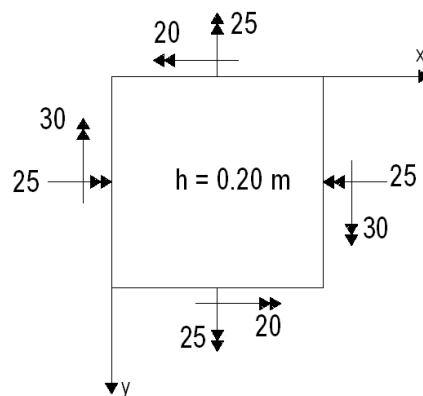


Fig. 4.1 – Esforços presentes no elemento de laje

▪ Segundo Gupta

Ao fim de 5 iterações obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\begin{cases}
 \theta_t = -49,50^\circ \\
 \theta_b = 45^\circ \\
 a_t = 0,0442 \text{ m} \\
 a_b = 0,0436 \text{ m} \\
 N_{sxt} \cong 0 \\
 N_{syt} = 261,8 \text{ kN / m} \\
 N_{sxb} = 348,32 \text{ kN / m} \\
 N_{syb} = 35,15 \text{ kN / m}
 \end{cases}
 \Leftrightarrow
 \begin{cases}
 A_{sxt} = 0 \\
 A_{syt} = 261,8 / 34,8 = 7,52 \text{ cm}^2 / \text{m} \\
 A_{sxb} = 348,32 / 34,8 = 10,01 \text{ cm}^2 / \text{m} \\
 A_{syb} = 35,15 / 34,8 = 1,01 \text{ cm}^2 / \text{m}
 \end{cases}$$

▪ Segundo o Código Computacional – EC2

No caso do código computacional obtiveram-se os seguintes valores, também ao fim de cinco iterações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_t = -50,18^\circ \\ \theta_b = 45^\circ \\ a_t = 0,0444\text{m} \\ a_b = 0,0437\text{m} \\ f'_{tdx} = 0\text{MPa} \\ f'_{tdy} = 5,90\text{MPa} \\ f'_{tdx} = 0,74\text{MPa} \\ f'_{tdy} = 8,07\text{MPa} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_{sxt} = 0 \\ A_{syt} = \frac{5,90}{348} \times 0,0444 = 7,53\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = \frac{8,07}{348} \times 0,0437 = 10,01\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = \frac{0,74}{348} \times 0,0437 = 0,93\text{cm}^2/\text{m} \end{array} \right.$$

Como se pode constatar pelos resultados acima apresentados, os valores das quantidades de armaduras obtidos segundo a metodologia sugerida por Gupta e os homólogos segundo o programa DesignSlab são muito próximos, confirmando deste modo, o facto de que a utilização de um único braço $z = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right)$, pouco influenciará nos resultados finais.

Em anexo, apresenta-se o presente exemplo desenvolvido iteração a iteração, e são apresentados também os restantes exemplos, que à semelhança deste, demonstram a proximidade dos resultados obtidos pelo programa em estudo com a metodologia estudada por Gupta.

4.2.2. EXEMPLO 2 – LAJE SIMPLEMENTE APOIADA

Na Figura 4.2 apresenta-se uma laje simplesmente apoiada nos quatro bordos, sujeita a uma carga de cálculo de 15 kN/m^2 , incluindo o peso próprio. A laje em estudo tem uma espessura de 0.15m e dimensões em planta $5.0 \times 6.0\text{m}^2$. Os materiais considerados são o betão C20/25 e o aço S400.

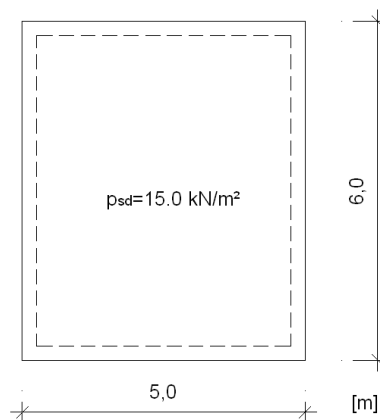


Fig. 4.2 – Geometria e carga para a laje simplesmente apoiada

4.2.2.1. Análise Estrutural – Robot Millennium

Os momentos principais determinados no Robot Millennium encontram-se ilustrados na Figura 4.3. Através desta figura, é possível visualizar a trajectória dos esforços condicionantes, e consequentemente interpretar o comportamento estrutural da laje. Repare-se que na zona central está bem evidenciado um comportamento ortogonal da laje sujeita unicamente a momento positivos. Por sua vez, próximo dos cantos constata-se a presença de momentos principais positivos e negativos oblíquos em relação aos bordos da laje. Compreende-se assim que numa situação de optimização de armaduras, colocar-se-iam armaduras na camada superior segundo a orientação dos momentos principais negativos e armaduras na camada inferior segundo a orientação dos momentos principais positivos, na zona dos cantos.

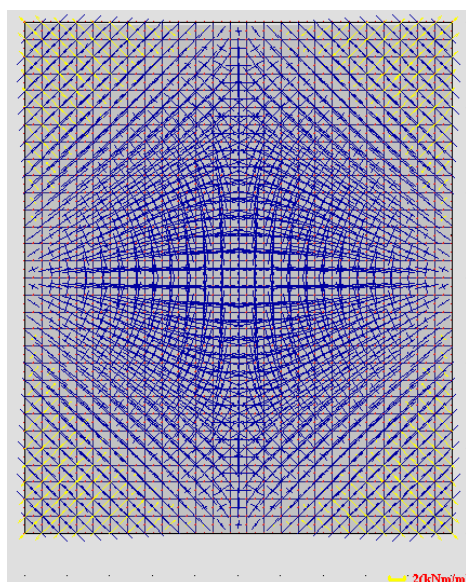


Fig. 4.3 – Momentos principais negativos (amarelo) e positivos (azul)

Como resultado da análise elástica linear, apresentam-se de seguida na Figura 4.4 os momentos existentes na laje em estudo. Nesta figura observa-se na zona central a maior predominância de momentos flectores M_{xx} e M_{yy} e uma menor presença dos momentos torsores, justificando a ortogonalidade das orientações dos momentos principais evidenciados na Figura 4.4, o que leva a estrutura a ter um comportamento determinado pelos momentos flectores nas direcções x e y , sem qualquer interferência dos momentos torsores. No que respeita às regiões dos cantos, observa-se precisamente o oposto, ou seja, uma predominância dos momentos torsores e uma menor presença dos momentos flectores. Note-se que os valores dos momentos torsores nas zonas dos cantos é da mesma ordem de grandeza dos valores dos momentos flectores na zona central, o que tendo em linha de conta a metodologia de determinação das armaduras, pressupõe-se que tanto para a zona dos cantos como para a zona central se terão valores de armadura segundo x e y similares. Assim sendo, poder-se-á

dizer que o dimensionamento desta estrutura é dividido em duas regiões função de dois tipos de esforços – na zona central devido aos momentos flectores, e nos cantos devido aos momentos torsores, prática que obviamente é usualmente utilizada no dimensionamento de lajes armadas em cruz.

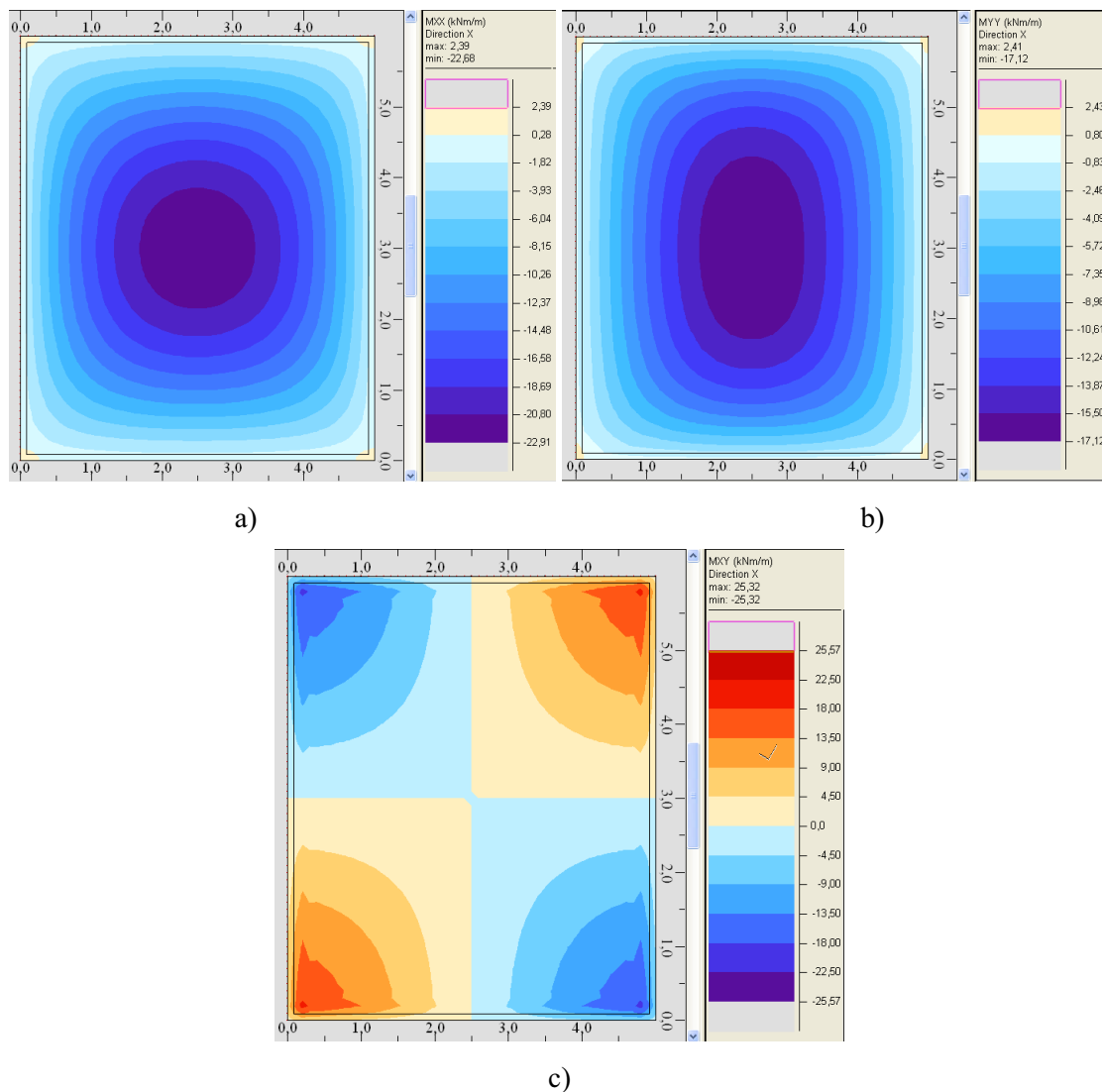


Fig. 4.4 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}

Assim sendo, através destas figuras, conseguem-se visualizar quais as zonas com maior concentração de esforços, o que consequentemente conduzirá a uma maior área de armadura.

4.2.2.2. Resultados do Cálculo de Armadura com o Programa DesignSlab

Tal como já antes descrito, quando se utiliza o programa DesignSlab é necessário fornecer alguns dados. Assim, além das características dos materiais acima enunciadas, tem-se de introduzir também a

espessura da laje. Para este primeiro exemplo apresenta-se a janela interactiva para exemplificar, onde se assinala uma espessura $h = 0.15$ m na Figura 4.5.



Fig. 4.5 – Janela com os materiais e espessura da laje a dimensionar

Na Figura 4.6 apresentam-se os mapas com as quantidades de armadura superior e inferior segundo x . Nesta figura pode-se constatar algumas considerações anteriormente proferidas, como o facto de o valor da armadura superior na zona dos cantos ser aproximadamente igual ao valor de armadura inferior observado na zona central. Nota-se também no que respeita ao mapa de armaduras superiores, serem estas necessárias apenas nas zonas dos cantos, notabilizando-se na restante estrutura a inexistência de valores para armadura superior (cor azul no gráfico).

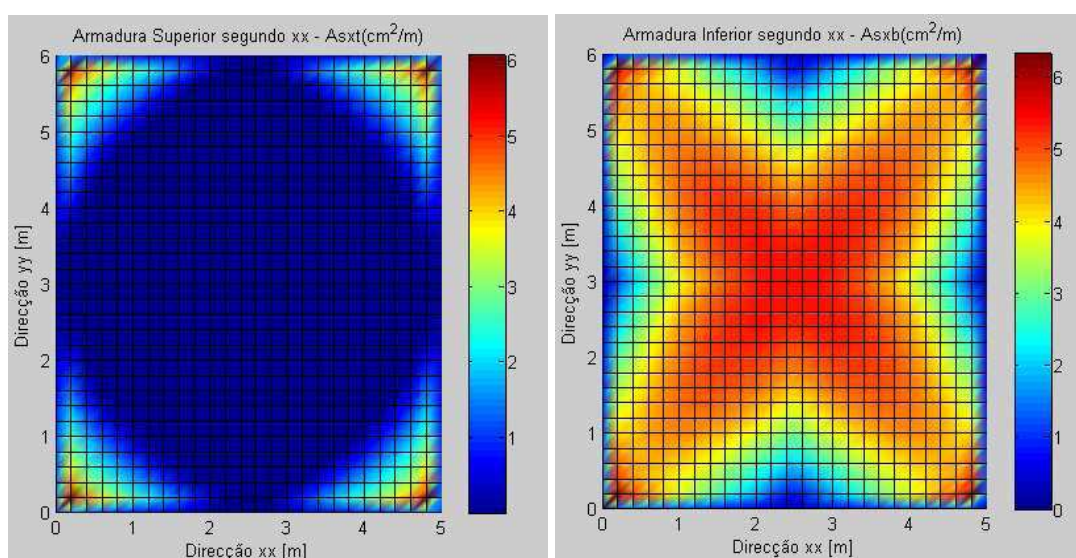


Fig. 4.6 – Armaduras superior e inferior segundo x

Analisando a Figura 4.6 nas zonas dos cantos junto ao contorno, observa-se uma brusca transição de cores (ver detalhadamente a Figura 4.7), o que significa uma grande variação da quantidade de armadura. No entanto, estas variações não reflectem a realidade, estando este fenómeno directamente relacionado com os momentos torsores, que apresentam nesta zona grandes variações. Acresce o facto de que os momentos flectores são praticamente nulos, o que faz com que a quantidade de armadura e as tensões instaladas no betão sejam somente devidas aos momentos torsores, passando portanto, também a revelar essas variações.

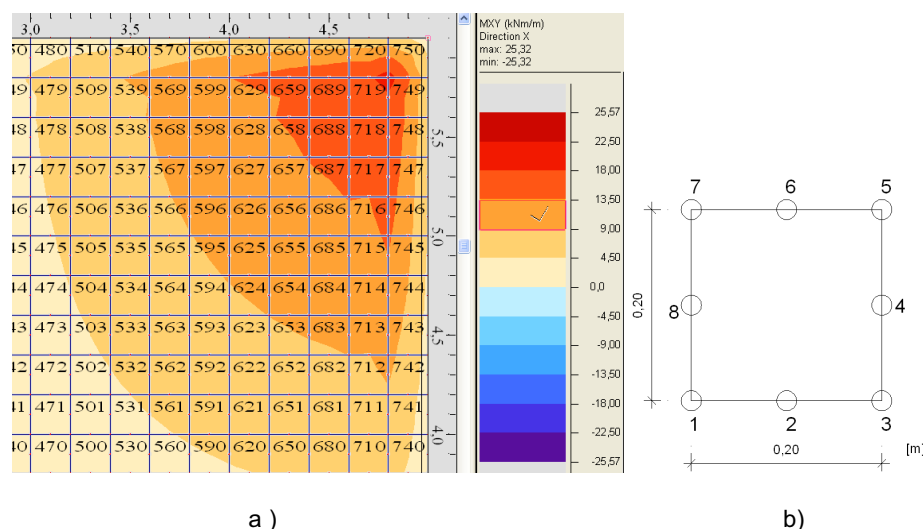


Fig. 4.7 – a) Momento M_{xy} no canto e representação dos elementos finitos; b) Numeração dos nós dos elementos finitos

Assim, observa-se por exemplo no elemento número 750, a variação brusca do valor de momento torsor ao passar do nó 5 para o nó 1. Para uma análise mais pormenorizada, apresenta-se o Quadro 4.1.

Quadro 4.1 – Momentos, armaduras e tensões no betão para o elemento finito 750

Elemento	Nó	M_{xx} kN.m/m	M_{yy} kN.m/m	M_{xy} kN.m/m	A_{sxb} cm ² /m	A_{sxt} cm ² /m	A_{syb} cm ² /m	A_{syt} cm ² /m	σ_{cdb} MPa	σ_{cdt} MPa
750	1	-0,42	-0,39	19,80	6,32	6,06	6,31	6,07	7,34	7,34
	2	-0,16	0,35	14,39	3,58	3,50	3,46	3,63	7,34	7,34
	3	0,07	1,26	6,21	1,47	1,50	1,19	1,79	3,45	3,45
	4	0,97	2,27	4,69	0,89	1,36	0,58	1,67	2,61	2,61
	5	2,13	2,13	1,90	0,00	0,97	0,00	0,97	0,59	1,06
	6	2,26	0,97	4,69	0,58	1,66	0,89	1,36	2,61	2,61
	7	1,25	0,06	6,21	1,19	1,79	1,47	1,50	3,45	3,45
	8	0,33	-0,15	14,38	3,46	3,62	3,58	3,50	7,34	7,34

Observa-se que do nó 1 para o nó 5 do elemento finito 750 há um aumento do momento torsor de 1,90 kN.m/m para 19,80 kN.m/m. Assim sendo, esta variação brusca revela-se na quantidade de armadura e também ao nível das tensões no betão, tal como se observa no Quadro 4.1. Portanto, as variações de cores nos gráficos de armaduras nas zonas dos cantos está directamente relacionadas com a variação apresentada pelos momentos torsores.

Disponibilizando o Robot Millennium os resultados de cada elemento finito sem qualquer tipo de medianização, constata-se também que alguns nós que pertencem a elementos finitos vizinhos apresentam resultados bastante díspares, como é o caso dos elementos finitos que contêm o nó 1 do elemento finito 750 (ver Quadro 4.2), o que indica que nesta zona os elementos finitos apresentam variações bastante grandes para o mesmo nó, sabendo-se unicamente que o programa efectua a média para cada nó. No entanto, não há conhecimento de como o programa calcula o valor em cada nó para cada elemento, o que limita uma possível actuação nesse campo.

Quadro 4.2 – Momentos flectores e torsores no nó 2306 (nó 1 do elemento finito 750)

Nó/Elemento	M _{xx} kN.m/m	M _{yy} kN.m/m	M _{xy} kN.m/m
2306/719	-0,65	-0,61	14,27
2306/720	-0,25	0,2	19,8
2306/749	0,17	-0,22	19,8
2306/750	-0,95	-0,92	25,32

Pela Figura 4.6 verifica-se que o valor máximo da armadura superior e inferior na direcção x são cerca de 6,0 cm²/m. Este valor observa-se na zona dos cantos, revelando deste modo a influência dos momentos torsores, como já referido. Não obstante a importância destes torsores, deve-se ter em linha de conta o facto destes valores mais elevados se apresentarem pontualmente, pelo que não devem ser representativos do valor máximo da armadura nessa zona. Na Figura 4.7 a), constata-se que são os elementos 689, 719 e 718 que apresentam maiores valores de armadura. Verifica-se também pelo Quadro 4.3 que nestes 3 elementos finitos, que somente poucos os nós apresentam valores acima dos 4 e 5 cm²/m no que respeita à armadura superior e inferior, respectivamente.

Quadro 4.3 – Momentos, armaduras e tensões no betão para o elemento finito 750

Elemento	Nó	M _{xx} kN.m	M _{yy} kN.m	M _{xy} kN.m	A _{sxb} cm ² /m	A _{sxt} cm ² /m	A _{syb} cm ² /m	A _{syt} cm ² /m
689	1	-8,46	-5,54	-7,52	4,34	2,76	4,33	2,77
	2	-2,82	-2,71	14,81	4,39	2,98	4,36	3,01
	3	-2,43	-2,24	15,37	4,50	3,27	4,45	3,32
	4	-1,88	-1,74	15,3	4,33	3,38	4,30	3,42
	5	-1,28	-1,35	17,39	5,09	4,39	5,11	4,37
	6	-1,5	-1,69	16,71	4,82	4,03	4,87	3,98
	7	-9,19	-5,75	-5,04	4,69	3,79	4,77	3,70
	8	-8,87	-5,66	-6,28	4,12	2,90	4,14	2,88

718	1	-3,44	-2,93	14,53	4,441	2,74	4,315	2,87
	2	-2,76	-2,28	14,44	4,241	2,88	4,122	3
	3	-2,16	-1,57	16,45	4,884	3,75	4,729	3,91
	4	-1,77	-1,38	16,85	4,954	4,01	4,85	4,12
	5	-1,41	-1,19	17,46	5,159	4,39	5,099	4,45
	6	-1,87	-1,74	15,33	4,341	3,4	4,308	3,43
	7	-2,43	-2,24	15,37	4,497	3,27	4,449	3,32
	8	-2,94	-2,58	14,87	4,44	2,97	4,35	3,06
719	1	-2,43	-2,24	15,37	4,497	3,27	4,449	3,32
	2	-1,87	-1,74	15,33	4,341	3,4	4,308	3,43
	3	-1,41	-1,19	17,46	5,159	4,39	5,099	4,45
	4	-0,85	-0,8	17,38	4,968	4,5	4,955	4,52
	5	-0,42	-0,39	19,8	6,324	6,06	6,314	6,07
	6	-0,86	-0,79	17,34	4,952	4,48	4,933	4,5
	7	-1,28	-1,35	17,39	5,09	4,39	5,109	4,37
	8	-1,88	-1,74	15,3	4,332	3,38	4,297	3,42

Considerando os elementos que se encontram totalmente dentro da penúltima linha de nível dos momentos torsores de forma a encontrar um valor médio representativo da armadura a adoptar na zona dos cantos, têm-se então os elementos finitos 688, 689, 718 e 719. Calculando a média do valor de armadura superior segundo a direcção y , sem repetições, verifica-se que o valor obtido é de cerca de $3,44 \text{ cm}^2/\text{m}$, como se constata no Quadro 4.4. Note-se que nesta média entra o elemento finito que apresenta o valor máximo (nó 5 do elemento 719).

Quadro 4.4 – Média do valor de armadura superior segundo a direcção y no canto

$A_{\text{syt}} (\text{cm}^2/\text{m})$						
Elemento						
688	689	717	718	719	Total	
2,30	2,77	2,46	2,87	3,32	4,76	
2,55	3,01	2,61	3,00	3,43	5,16	
2,87	3,32	3,41	3,91	4,45	6,28	
3,06	3,42	3,66	4,12	4,52	18,77	
3,32	4,37	3,91	4,45	6,07	22,11	
3,01	3,98	3,00	3,43	4,50	17,92	
2,77	3,70	2,87	3,32	4,37	6,47	
2,50	2,88	2,65	3,06	3,42	8,03	
Total					89,50	
Nº nós					26,00	
Média					3,44	

No que respeita à média do valor de armadura inferior segundo a direcção y , apresenta-se o Quadro 4.5, com o valor de $4,54 \text{ cm}^2/\text{m}$.

Quadro 4.5 – Média do valor de armadura inferior segundo a direcção y no canto

$A_{syb} \text{ (cm}^2\text{/m)}$					
Elemento					
688	689	717	718	719	Total
4,27	4,33	4,10	4,31	4,45	8,37
4,25	4,36	3,88	4,12	4,31	8,13
4,31	4,45	4,32	4,73	5,10	8,63
4,35	4,30	4,52	4,85	4,95	22,97
4,45	5,11	4,73	5,10	6,31	25,70
4,36	4,87	4,12	4,31	4,93	22,60
4,33	4,77	4,31	4,45	5,11	9,10
4,26	4,14	4,19	4,35	4,30	12,59
Total					118,10
Nº nós					26,00
Média					4,54

Efectuando cortes no meio vão e próximos do apoio paralelos à direcção y , Figura 4.8, pode-se constatar para diferentes secções junto ao apoio a variação do diagrama da armadura superior na direcção x , ilustradas na Figura 4.9. Note-se que nestas imagens os valores negativos de armadura indicam que se trata de armadura inferior e os correspondentes positivos indicam que se trata de armadura superior.

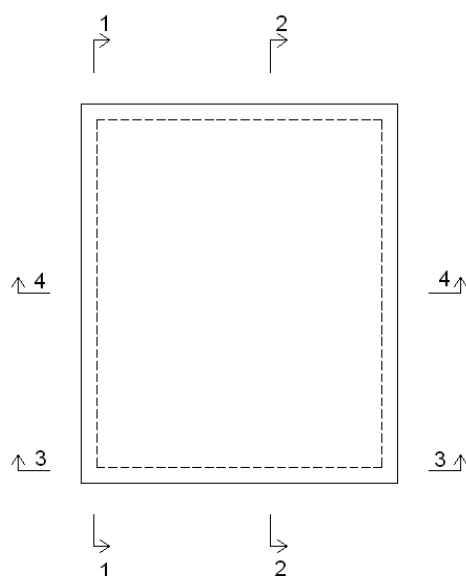


Fig. 4.8 – Visualização das secções para o traçado da armadura

No que respeita à secção 1, junto ao apoio, são feitos quatro cortes na proximidade do apoio numa distância de 0.40 m, tal como ilustrado na Figura 4.9.

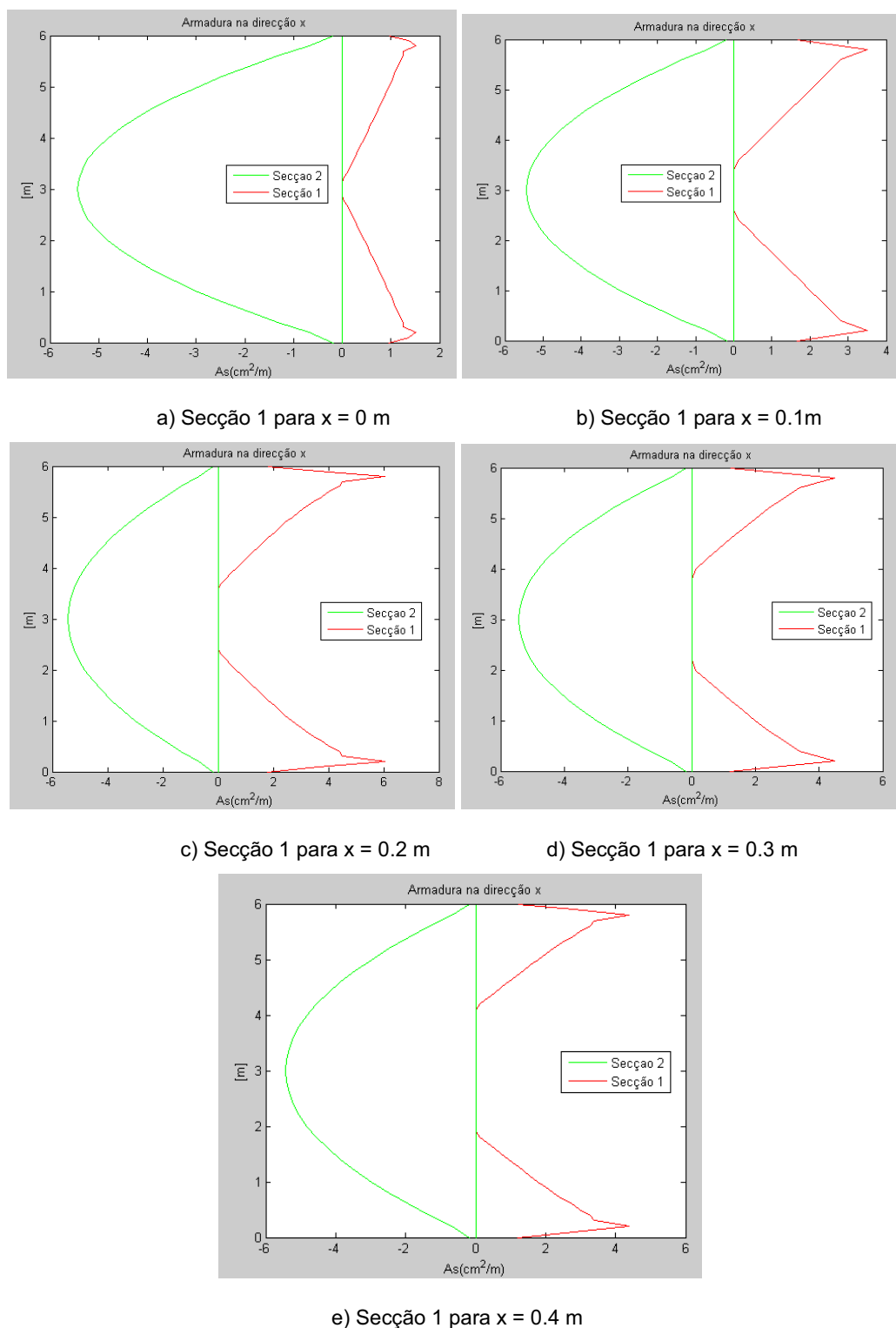


Fig. 4.9 – Diagrama das armaduras superior e inferior para as secções 2 e 1

Nestas imagens apresentadas na Figura 4.9, verifica-se junto ao bordo um crescimento brusco no diagrama de armadura superior, confirmando as observações e considerações anteriormente descritas. Sendo esta variação irrealista e, tomando em linha de conta o valor médio para armadura superior

segundo a direcção x obtida no Quadro 4.4, seria desejável anular os picos observados nas imagens da Figura 4.9. Tendo como referência os 5 elementos finitos sobre os quais se calculou a média, facilmente se chega à conclusão que o nó representativo é o nó 5 do elemento 688. O corte que representa o valor da armadura superior na direcção y que passa por este nó é o da Figura 4.9 d). Na Figura 4.10, apresenta-se o diagrama de armadura superior na direcção x em que o valor máximo é o constatado no nó 5 do elemento 688. Nesta figura procede-se a uma alteração ao respectivo diagrama, tendo em atenção o valor médio anteriormente referenciado como representativo do canto no que toca à armadura superior segundo a direcção x .

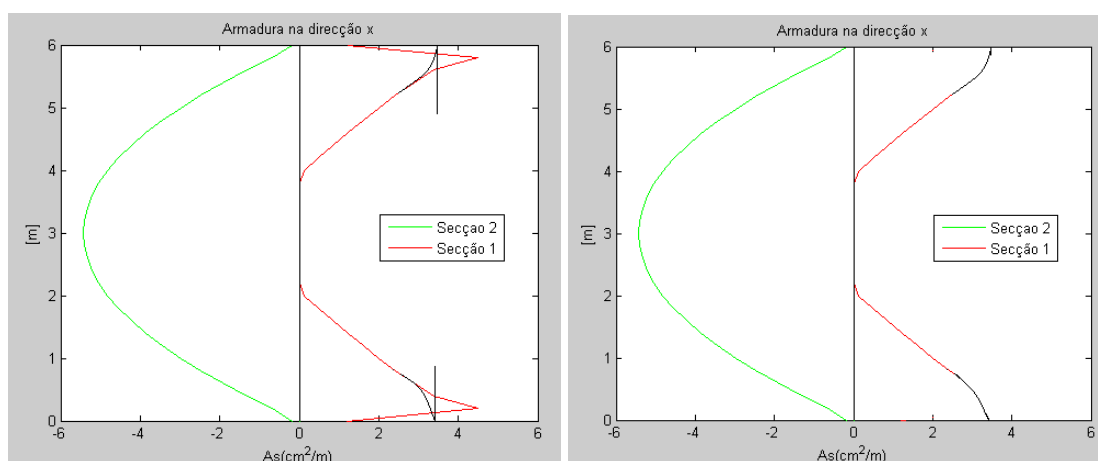


Fig. 4.10 – Reconstrução do diagrama de armadura superior na direcção x

De seguida apresenta-se a Figura 4.11 com as respectivas distribuições das quantidades de armadura segundo y .

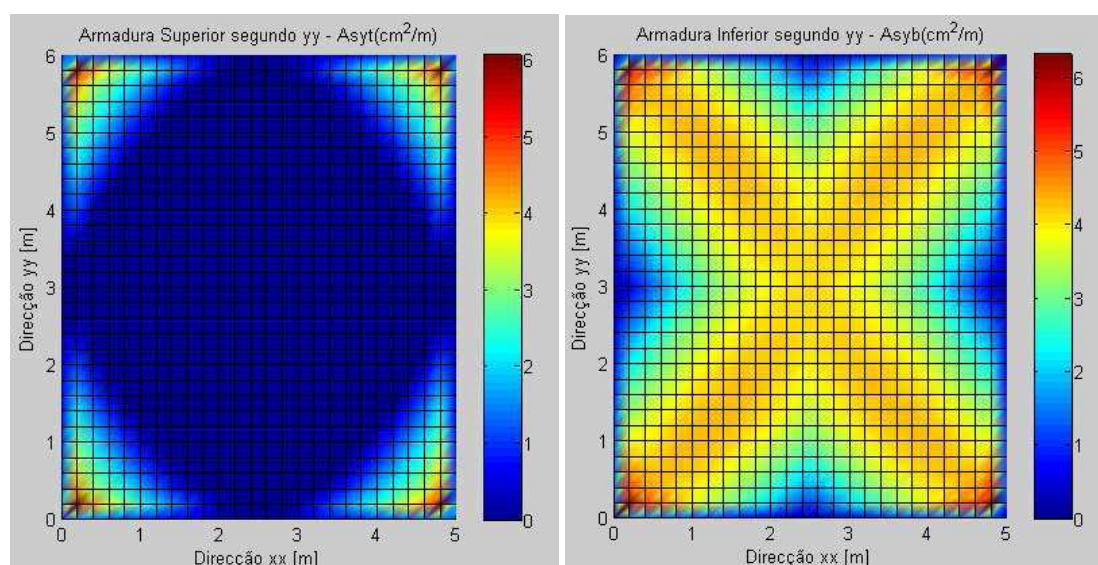
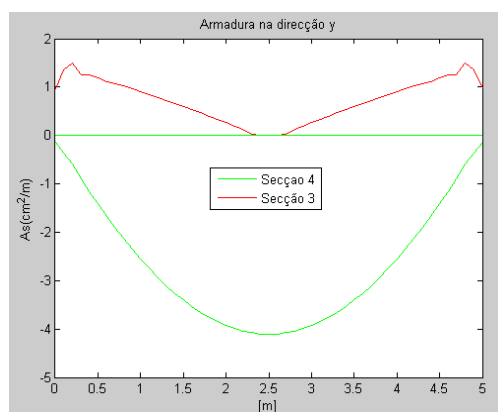


Fig. 4.11 – Armaduras superior e inferior segundo y

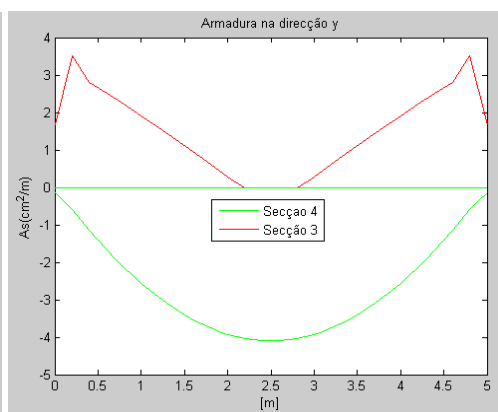
No que respeita à direcção y , os valores máximos de armaduras inferior e superior são também cerca de $6,0 \text{ cm}^2/\text{m}$. À semelhança do que se constatou para a direcção x , também a direcção y se verificam as mesmas variações nos gráficos de cores e também nos diagramas da armadura, pelo que as observações a efectuar no que diz respeito a estes gráficos são as mesmas que as preconizadas para os gráficos de armaduras segundo x .

Assim sendo, como os momentos flectores não têm praticamente influência nas zonas dos cantos, os valores de armadura superior e inferior segundo y bem como segundo x pouco diferenciam um do outro, dado o facto de só dependerem dos momentos torsores, como já anteriormente referenciado.

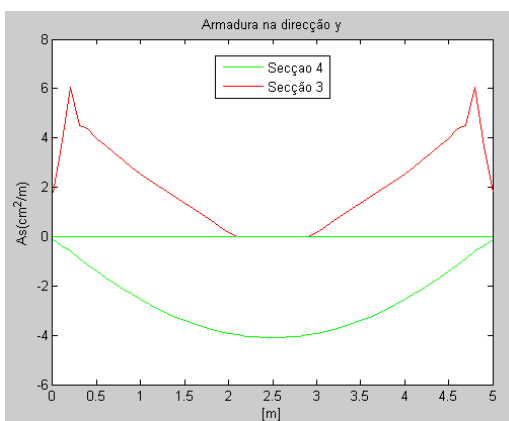
Apresentam-se na Figura 4.12 os cortes do meio vão e próximos do apoio paralelos à direcção x , podendo-se constatar para diferentes secções junto ao apoio a variação do diagrama da armadura superior na direcção y .



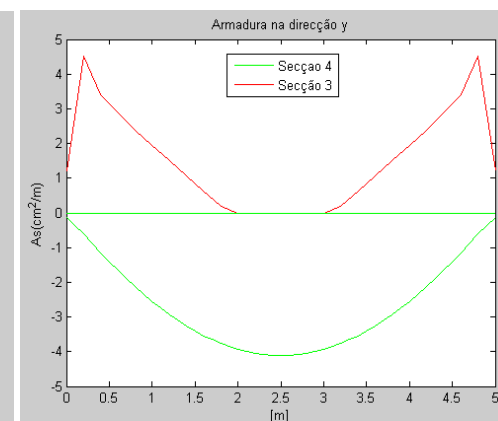
a) Secção 3 para $y = 0$



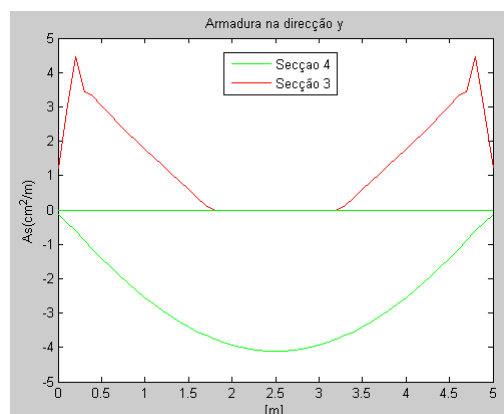
b) Secção 3 para $y = 0.1 \text{ m}$



c) Secção 3 para $y = 0.2 \text{ m}$



d) Secção 3 para $y = 0.3 \text{ m}$



e) Secção 3 para $y = 0.4$ m

Fig. 4.12 – Diagrama das armaduras superior e inferior para as secções 3 e 4

De igual modo, também para a direcção y apresenta-se um corte que representa o valor da armadura superior na direcção y na zona do canto, que passa pelo nó 5 do elemento 688, o qual ficou como sendo o representativo da armadura de canto. Na Figura 4.13 ilustra-se o diagrama d) da Figura 4.12, bem como a respectiva reconstrução do mesmo, dado o pico existente.

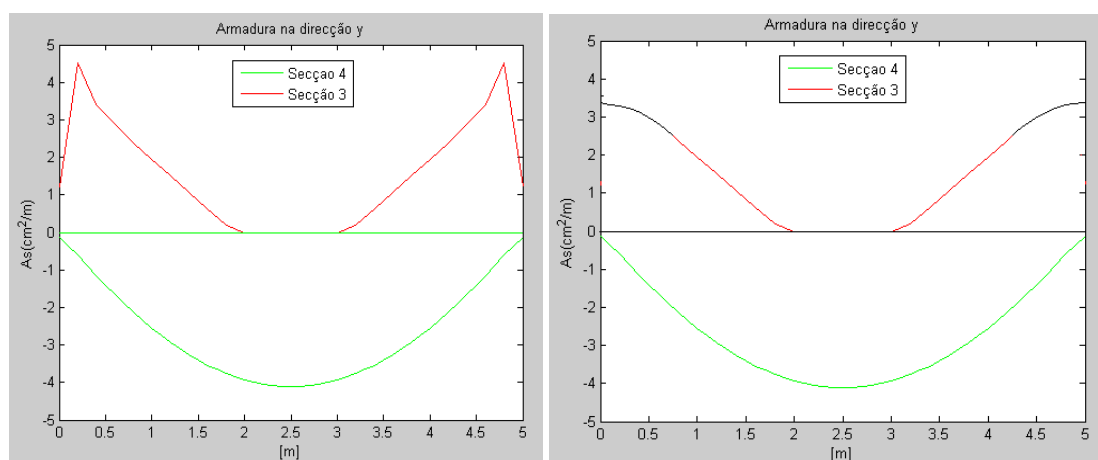


Fig. 4.13 – Reconstrução do diagrama da armadura superior segundo a direcção y

No que respeita às tensões instaladas no betão, apresenta-se na Figura 4.14 as distribuições com os respectivos valores das tensões para a camada superior e para a camada inferior. Constata-se que estas distribuições também apresentam variações bruscas tanto junto ao bordo como numa zona também ela de canto mas mais no interior. No que toca junto ao bordo, a explicação é a mesma já abordada para o caso dos gráficos com quantidades de armadura e, na zona mais interior, decidiu-se estudar um elemento finito que apresenta essas variações de forma a compreender a razão pela qual apresenta esse fenómeno.

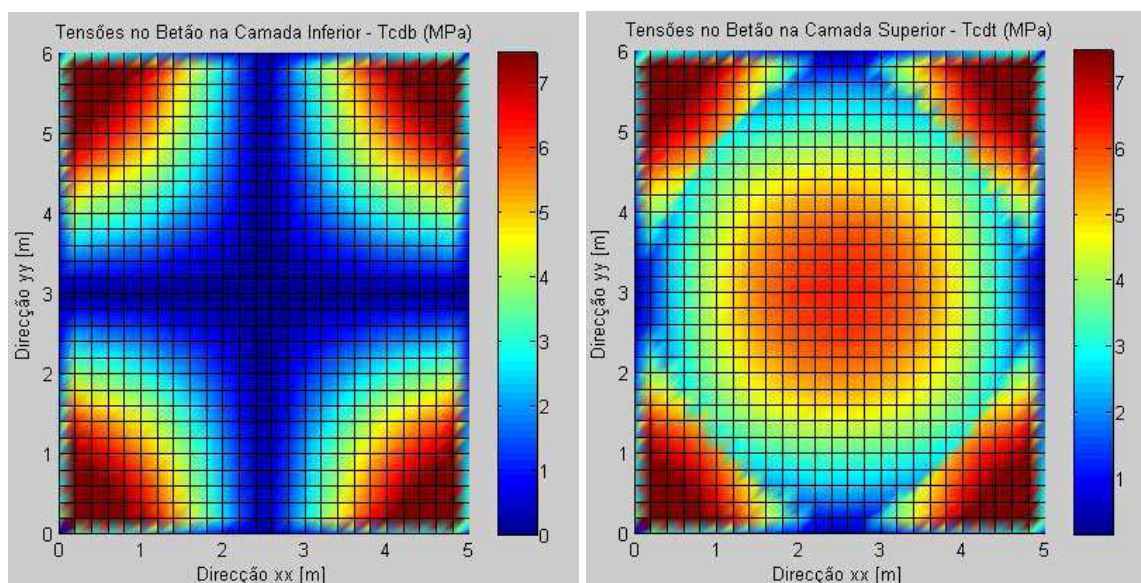


Fig. 4.14 – Verificação do esmagamento do betão

Assim sendo, um elemento que apresenta essas características é o elemento finito 595 (ver Figura 4.7), para o qual se obtiveram os esforços e tensões no betão nos nós ilustrados no Quadro 4.6.

Note-se que a posição deste elemento finito intercepta uma isolinha de momentos torsores, Figura 4.7, o que leva a que os nós 4, 5 e 6 apresentem valores de momento torsor um pouco mais elevados do que os restantes, verificando-se também uma diminuição dos momentos flectores nos três nós referidos.

Quadro 4.6 – Momentos e tensões no elemento finito 595

Elemento	Nó	M_{xx} kN.m/m	M_{yy} kN.m/m	M_{xy} kN.m/m	σ_{cdb} MPa	σ_{cdt} MPa
595	1	-11,60	-9,89	8,18	4,54	3,22
	2	-11,07	-9,29	8,68	4,82	3,08
	3	-10,55	-8,69	9,18	5,10	2,93
	4	-9,88	-8,35	9,60	5,33	5,34
	5	-9,22	-8,01	10,02	5,57	5,57
	6	-9,66	-8,55	9,47	5,26	5,26
	7	-10,11	-9,09	8,92	4,96	2,81
	8	-10,85	-9,49	8,55	4,75	3,01

Este acréscimo do valor dos momentos torsores e diminuição dos momentos flectores nos três referidos nós em relação aos outros nós é suficiente para que a condição $\sigma_{Edx} \cdot \sigma_{Edy} > \tau_{Edxy}^2$ não se verifique, o que leva a que a tensão no betão seja $\sigma_{cd} = 2|\tau_{Edxy}|$. Como a ordem de grandeza dos momentos M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} é a mesma, ao verificar a condição acima transcrita a tensão no betão é igual à máxima tensão normal segundo a direcção x ou y e, se não verificar é o dobro da tensão de corte, ou seja aproximadamente o dobro da tensão normal. Então, do nó 3 para o nó 4, como há uma

passagem de uma isolinha para outra, o acréscimo de momento torsor e o decréscimo dos flectores são suficientes para que se verifique a condição $\sigma_{Edx} \cdot \sigma_{Edy} > \tau_{Edxy}^2$, isto para o caso das tensões σ_{Edx} e σ_{Edy} serem de compressão.

Se se tiver em linha de conta um elemento finito que esteja numa única isolinha de momentos torsores, verifica-se igualmente um acréscimo similar de momentos torsores, sendo que no entanto, os flectores apresentam-se com maior preponderância de forma a verificar-se a condição acima exposta, como é exemplo o elemento finito 564, para o qual se apresenta o Quadro 4.7.

Quadro 4.7 – Momentos e tensões no elemento finito 564

Elemento	Nó	M_{xx} kN.m/m	M_{yy} kN.m/m	M_{xy} kN.m/m	σ_{cdb} MPa	σ_{cdt} Mpa
564	1	-13,90	-11,64	6,39	3,55	3,86
	2	-13,41	-11,09	6,88	3,82	3,73
	3	-12,92	-10,53	7,38	4,10	3,59
	4	-12,26	-10,21	7,78	4,32	3,41
	5	-11,60	-9,89	8,18	4,54	3,22
	6	-12,02	-10,41	7,63	4,24	3,34
	7	-12,45	-10,92	7,07	3,93	3,46
	8	-13,17	-11,28	6,73	3,74	3,66

Assim sendo, as variações bruscas de cor nos gráficos das tensões no betão na zona de canto, mas mais no interior, revelam-se ao longo da passagem da isolinha que contém o elemento 595 (ver Figura 4.7). Verificou-se ser uma situação particular pelo facto de existir simultaneamente um acréscimo suficiente de momentos torsores com um decréscimo de flectores em alguns nós do mesmo elemento finito que leva à não verificação da condição $\sigma_{Edx} \cdot \sigma_{Edy} > \tau_{Edxy}^2$. Portanto, está perante um mesmo elemento finito que contém nós que verificam esta condição e outros que não verificam, determinando deste modo, dois caminhos diferentes para o cálculo das tensões no betão para o mesmo elemento finito. Sendo a ordem de grandeza dos momentos flectores e torsores a mesma, a diferença no cálculo das tensões no betão, ao não verificar a referida condição, é do dobro em relação ao valor obtido no caso de se verificar. Assim se justifica que alguns elementos finitos apresentem variações de cor bruscas.

4.2.2.3. Análise dos Resultados Obtidos por Lourenço (1992)

Lourenço (1992) implementou uma formulação para dimensionamento de armaduras em lajes e cascas, apresentando os seguintes resultados para a laje simplesmente apoiada, apresentada no sub-capítulo 4.2.2, no que toca à direcção x , na Figura 4.15.

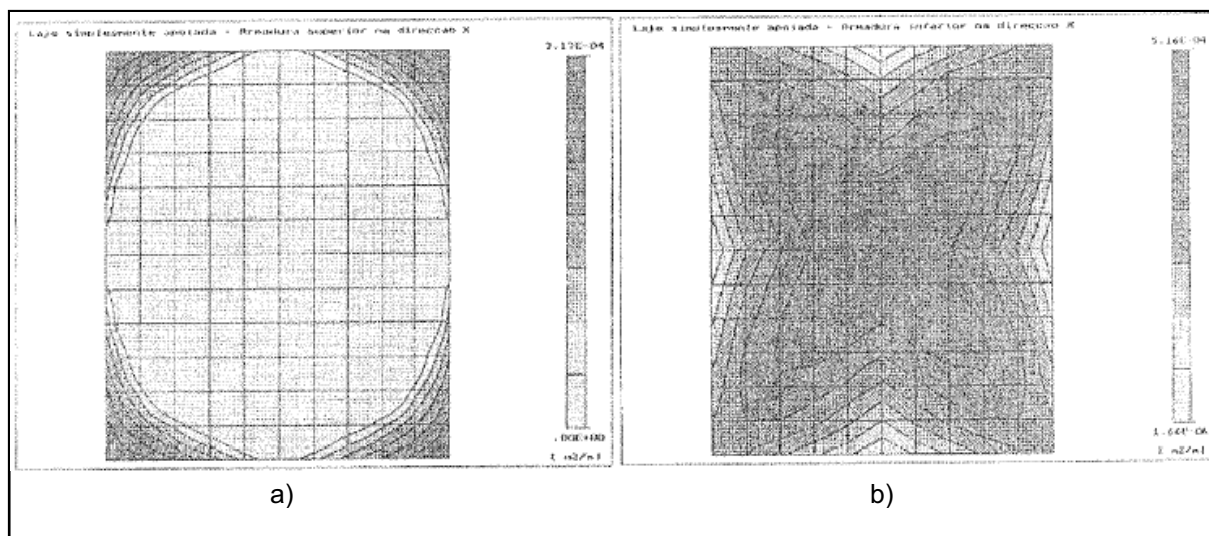


Fig. 4.15 – a) Armadura superior na direcção x; b) Armadura inferior na direcção x (Lourenço)

Os valores máximos de armadura superior e inferior determinados por Lourenço (1992) para a direcção x são 3,17 e 5,16 cm²/m, respectivamente.

No que toca à direcção y , os resultados apresentam-se na Figura 4.16.

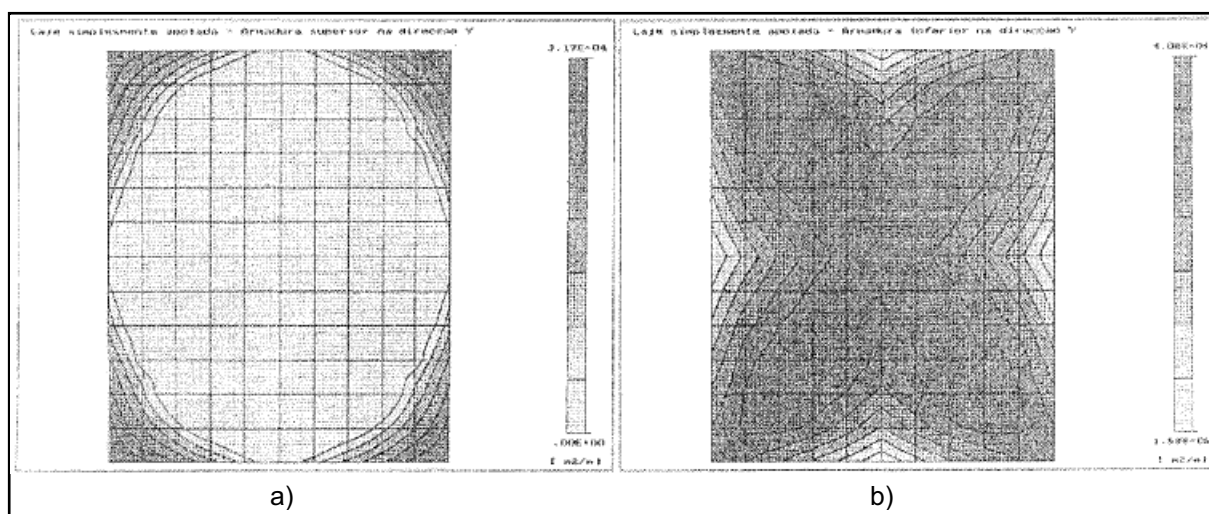


Fig. 4.16 – a) Armadura superior na direcção y; b) Armadura inferior na direcção y (Lourenço)

No que toca à direcção y , os valores máximos de armadura superior e inferior calculados por Lourenço (1992) para a direcção y são 3,17 e 4,08 cm²/m, respectivamente.

Na Figura 4.17 apresentam-se os diagramas ilustrativos dos resultados obtidos referentes aos cortes efectuados nas secções junto ao apoio e no meio vão (ver Figura 4.8).

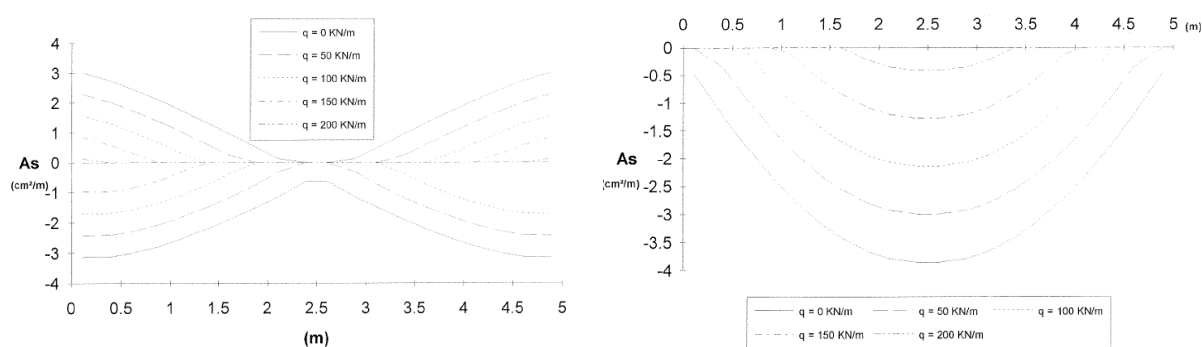


Fig. 4.17 - Armaduras na direcção y

Assim sendo, pela análise da Figura 4.17 e respectiva comparação com os resultados obtidos pelo programa DesignSlab, ilustrados na Figura 4.13, constata-se uma boa aproximação dos resultados obtidos. No que ao diagrama de armaduras inferiores diz respeito, a semelhança dos resultados é muito boa, constatando-se o máximo de cerca de $4 \text{ cm}^2/\text{m}$. Por seu turno, no que respeita ao diagrama de armaduras superiores, os resultados apresentados pelo programa DesignSlab são menos bons devido à variação brusca observada nas zonas próximas dos apoios nos cantos, justificada pelos esforços fornecidos pelo Robot Millennium como explicado anteriormente. No entanto, esses resultados são facilmente interpretados, levando um utilizador a encontrar um valor que represente da melhor forma a zona do canto.

4.2.3. EXEMPLO 3 – LAJE ENCASTRADA EM TRÊS LADOS E LIVRE NO OUTRO LADO

Na Figura 4.18 apresenta-se uma laje encastrada em três lados e livre no outro lado, sujeita a uma carga de cálculo de 15 kN/m^2 , incluindo o peso próprio. A laje em estudo tem uma espessura de 0.15 m e dimensões em planta $5.0 \times 6.0 \text{ m}^2$. Os materiais considerados são o betão C20/25 e o aço S400.

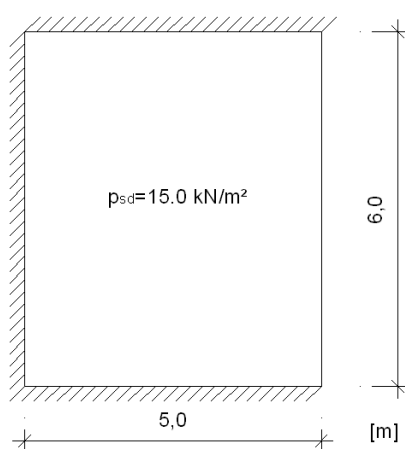


Fig. 4.18 – Geometria e carga para a laje simplesmente apoiada

4.2.3.1. ANÁLISE ESTRUTURAL – ROBOT MILLENNIUM

Os momentos principais encontram-se ilustrados na Figura 4.19. À imagem das considerações proferidas no exemplo anterior, também para o presente exemplo se pode compreender o funcionamento estrutural da laje a partir das orientações dos esforços principais. Neste exemplo, ao contrário do que se verificou no exemplo anterior, na zona dos cantos formados pelos lados encastrados não se constata uma presença tão significativa de momentos negativos, principalmente. Observa-se no que toca a estes momentos três zonas bem diferenciadas correspondentes aos três bordos encastrados, como seria de esperar. Quanto aos momentos positivos constata-se uma maior predominância na zona central junto ao bordo livre. Estas apreciações indiciam que a estrutura terá um funcionamento praticamente devido aos momentos flectores, não se revelando neste caso a influência dos momentos torsores (ver a Figura 4.20) tanto no comportamento estrutural, como consequentemente no dimensionamento.

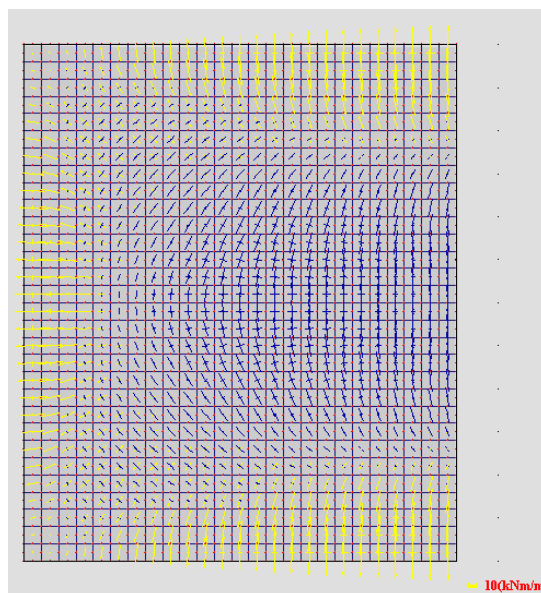


Fig. 4.19 – Momentos principais negativos (amarelo) e positivos (azul)

Como resultado da análise elástica linear, apresentam-se de seguida na Figura 4.20 os momentos existentes na laje em estudo. Nesta figura, as apreciações atrás proferidas são comprovadas, constatando-se pelo gráfico c) que os momentos torsores aparecem em valor reduzido face aos valores dos momentos flectores. Deste modo, o funcionamento estrutural será ortogonal segundo as direcções x e y , sendo que na direcção y esse comportamento tende a deslocar-se para o bordo livre.

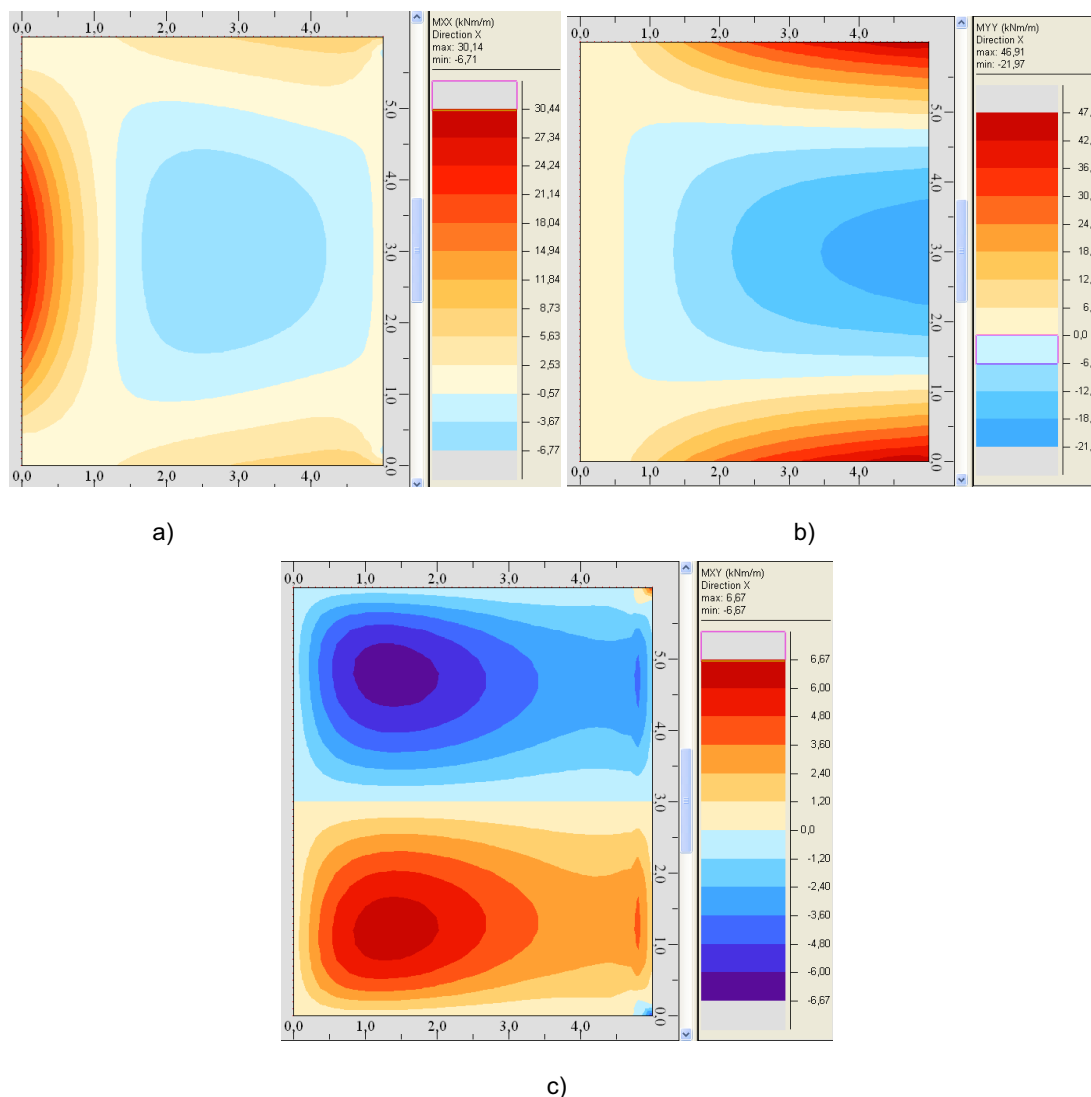


Fig. 4.20 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}

Note-se neste exemplo, ao contrário do verificado no exemplo anterior, que os momentos torsores não apresentam variações bruscas, prevendo-se deste modo, que os gráficos de armaduras não apresentem também tais variações.

4.2.3.2. RESULTADOS DO CÁLCULO DE ARMADURA COM O PROGRAMA DESIGNSLAB

À imagem do exemplo anterior, introduz-se a espessura da laje e das características dos materiais betão e aço no programa DesignSlab. Na Figura 4.21 pode-se observar as imagens referentes à obtenção da quantidade de armaduras superior e inferior segundo a direcção x .

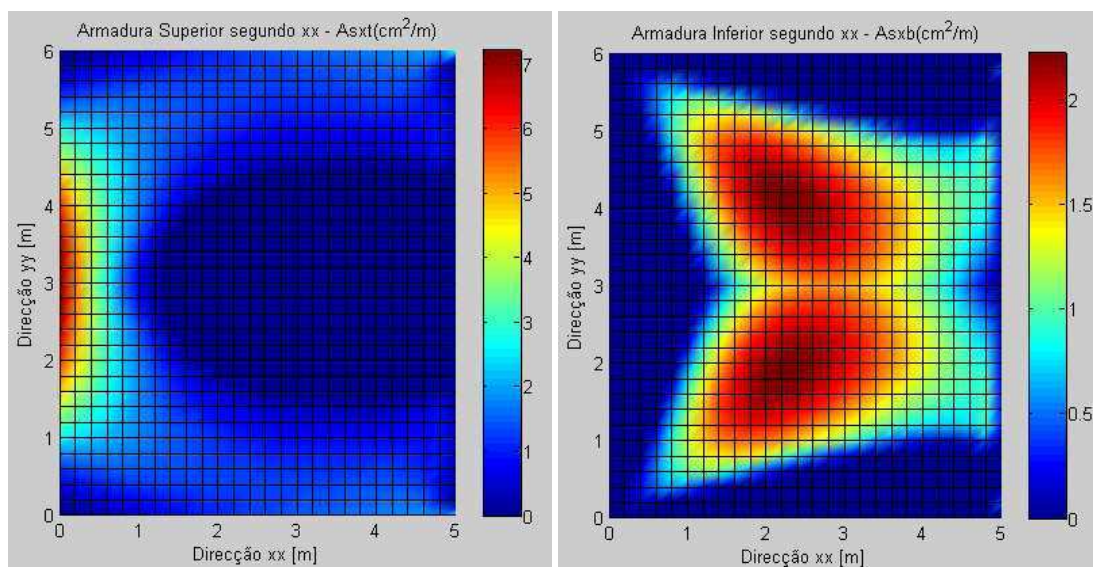


Fig. 4.21 – Armaduras superior e inferior segundo x

Pela Figura 4.21, verifica-se que os valores máximos de armadura inferior e superior na direcção x , determinados pelo DesignSlab, são cerca de 2,4 e 7,0 cm^2/m .

No que respeita às imagens com as quantidades de armadura superior e inferior segundo y , apresenta-se a Figura 4.22.

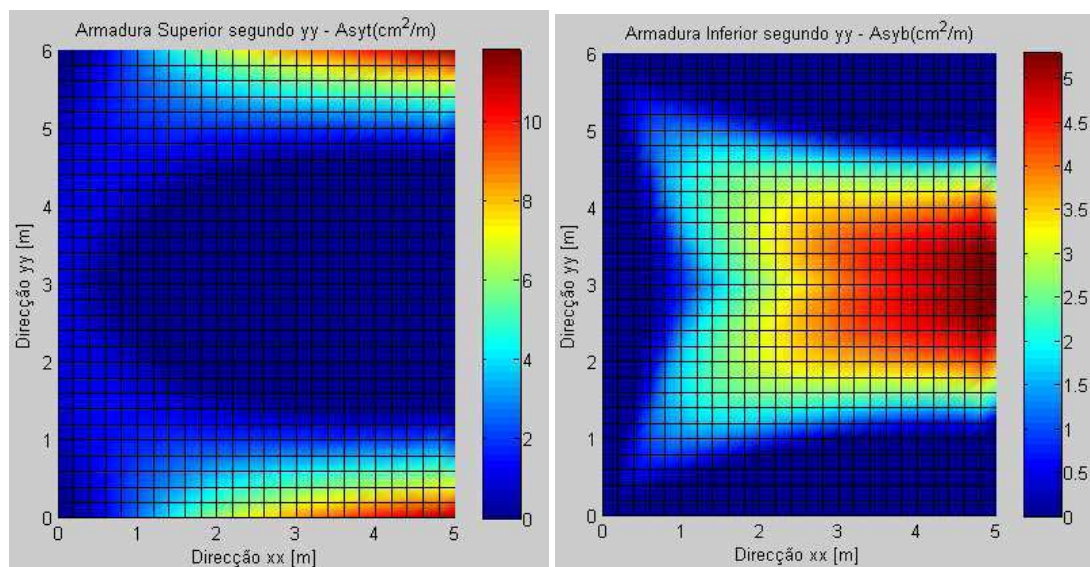


Fig. 4.22 – Armaduras superior e inferior segundo y

No que respeita à direcção y , os valores máximos de armadura inferior e superior, calculados pelo DesignSlab, são cerca de 6,0 e 12,5 cm^2/m , respectivamente.

Tal como já referido, nos gráficos de armaduras apresentados nas Figuras 4.21 e 4.22 não se observaram as variações bruscas nos tons de cor. Tal deve-se essencialmente ao facto dos momentos torsores se apresentarem de forma mais homogénea sem grandes variações.

No que respeita à verificação das tensões no betão, apresentam-se na Figura 4.23 duas imagens ilustrativas do nível dessas tensões.

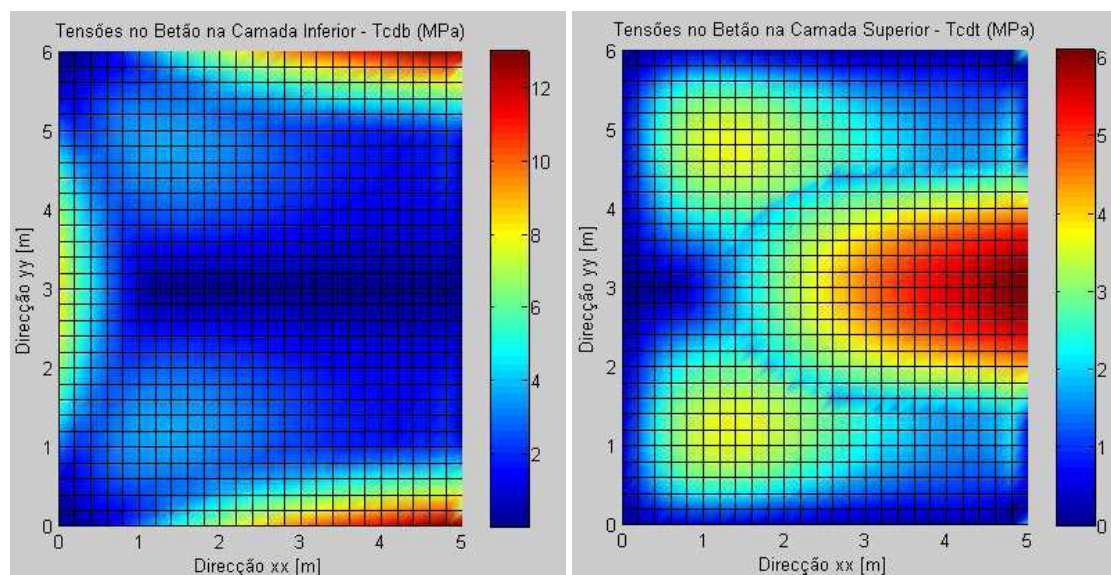


Fig. 4.23 – Verificação do esmagamento do betão

Como se observa na figura acima apresentada, as zonas críticas no que respeita ao esmagamento do betão são nos bordos segundo a direcção x para a camada inferior, e na zona central junto ao bordo livre para a camada superior, as quais correspondem às zonas submetidas a um maior campo de momentos flectores. No mapa das tensões no betão na camada superior verificam-se algumas variações de cor, as quais são explicadas pelas mesmas razões apontadas para o exemplo anterior, para o nó 595.

4.2.3.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS POR LOURENÇO (1992)

Segundo Lourenço (1992), os resultados obtidos para a laje apresentada no sub-capítulo 4.2.3 apresentam-se nas figuras seguintes. Na Figura 4.24 constata-se os resultados referentes à direcção x , onde se verificam os valores máximos de armadura superior e inferior de 6,85 e 2,17 cm^2/m , respectivamente.

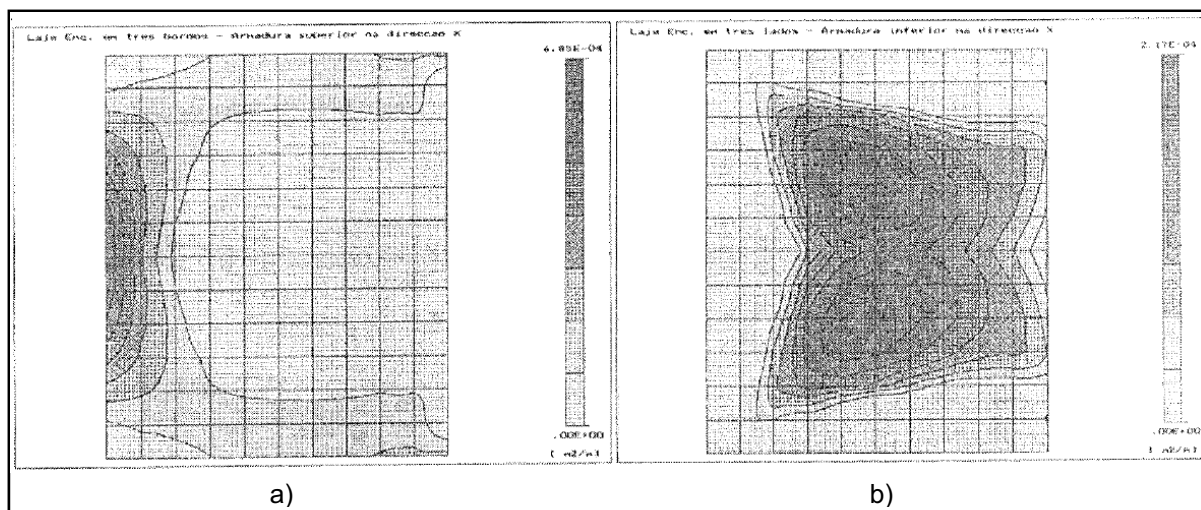


Fig. 4.24 – a) Armadura superior na direcção x; b) Armadura inferior na direcção x (Lourenço)

Quanto aos resultados segundo a direcção y são apresentados na Figura 4.25, onde se verificam os valores máximos de armadura superior e inferior de 5,15 e 11,0 cm^2/m , respectivamente.

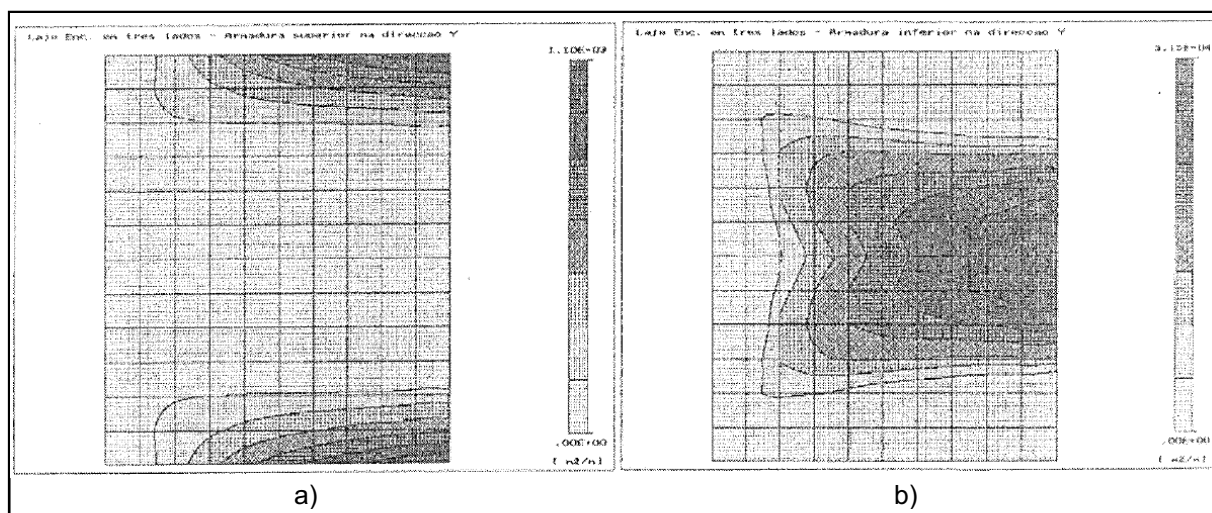


Fig. 4.25 – a) Armadura superior na direcção y; b) Armadura inferior na direcção y (Lourenço)

Fizeram-se cortes na laje nas quatro secções representadas na Figura 4.26. Para estas secções apresentam-se os diagramas de armaduras necessárias nas direcções x e y obtidos por Lourenço, visualizados na Figura 4.27.

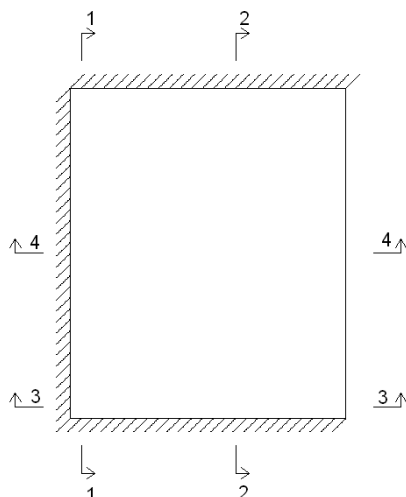


Fig. 4.26 – Secções para o traçado da armadura

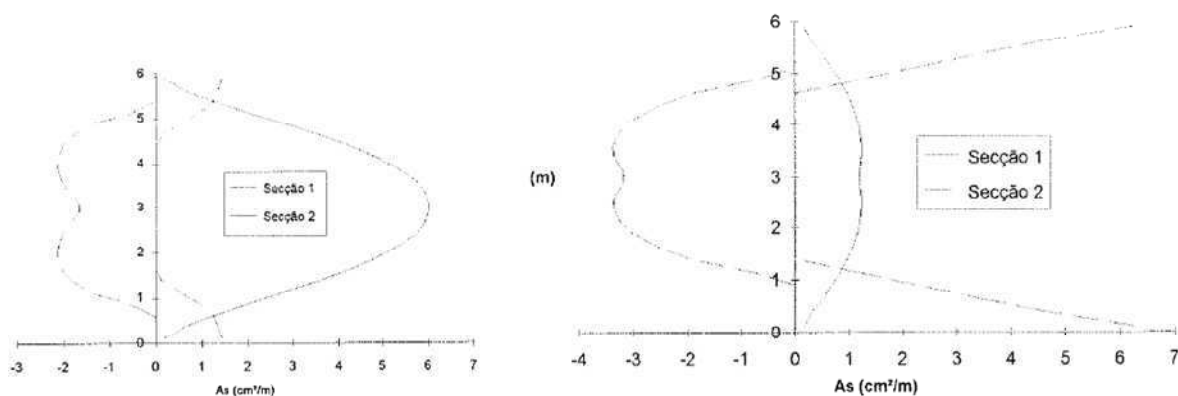


Fig. 4.27 – a) Armadura superior na direcção y; b) Armadura inferior na direcção y

Para aquelas secções, traçaram-se os diagramas de armaduras necessárias obtidos pelo programa DesignSlab, tal como ilustrado na Figura 4.28.

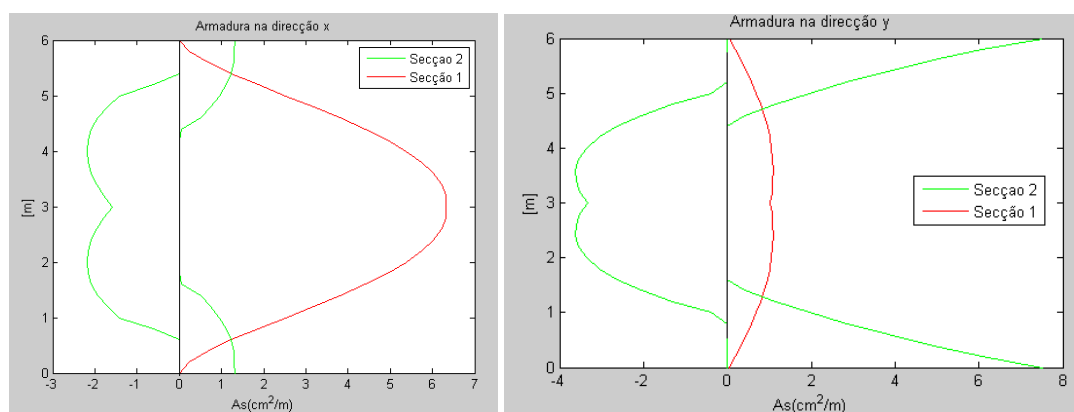


Fig. 4.28 – a) Armadura superior na direcção y; b) Armadura inferior na direcção y

Pela análise da Figura 4.27, na qual se apresentam os resultados para as secções 1 e 2 obtidos por Lourenço para o exemplo em estudo e, da Figura 4.28, na qual se apresentam os homólogos resultados obtidos pelo programa desenvolvido DesignSlab, verifica-se que esses resultados estão em total sintonia. Assim, deste modo, atesta-se a validade do programa DesignSlab.

No que respeita às secções 3 e 4, apresentam-se de seguida os resultados obtidos por Lourenço e pelo programa DesignSlab. Assim, na Figura 4.29, visualizam-se os diagramas de armaduras superior e inferior na direcção y obtidos por Lourenço.

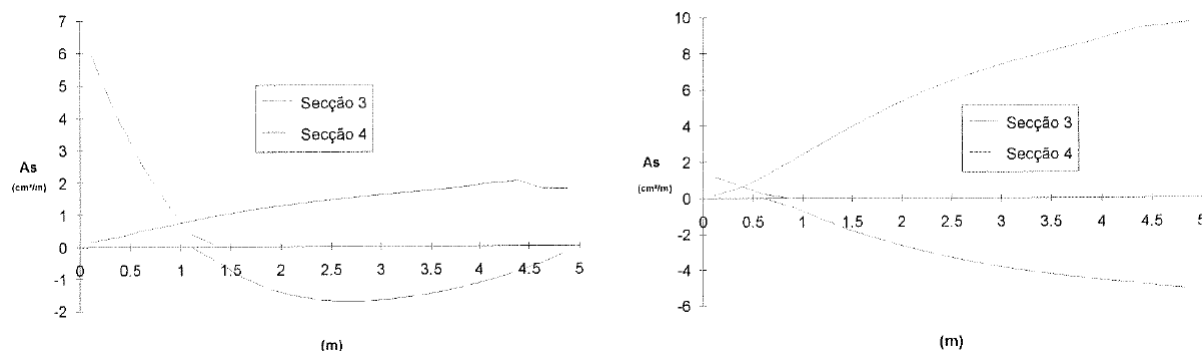


Fig. 4.29 – a) Armadura superior na direcção y ; b) Armadura inferior na direcção y

Na Figura 4.30, apresentam-se os homólogos diagramas fornecidos pelo programa DesignSlab, a partir dos quais se constata uma vez mais a grande aproximação destes resultados com os obtidos por Lourenço.

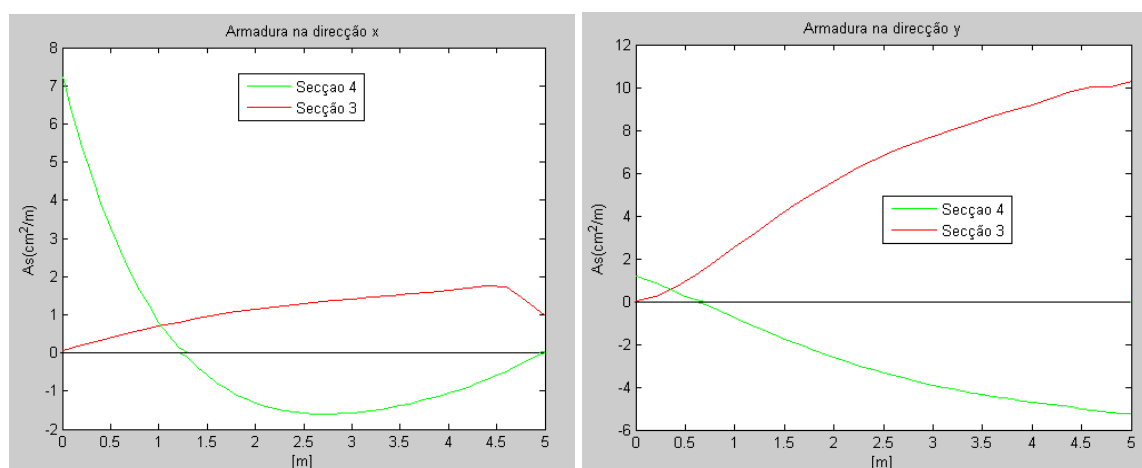


Fig. 4.30 – a) Armadura superior na direcção y ; b) Armadura inferior na direcção y

Assim sendo, através deste exemplo, constata-se pela grande aproximação dos resultados obtidos pelo programa DesignSlab com os resultados obtidos por Lourenço, que o programa desenvolvido é viável para a determinação de armaduras em lajes maciças.

4.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo procede-se à comprovação do programa DesignSlab, comparando resultados obtidos num exemplo em que se determinaram as armaduras num elemento de laje, sujeito a um campo de momentos genérico, pela metodologia sugerida por Gupta e, também pelo programa DesignSlab. Verificou-se que os resultados são praticamente iguais, isto apesar do valor de z adoptado na metodologia do programa DesignSlab ser único, ao passo que segundo a metodologia de Gupta existem dois valores de z , um para o cálculo das tensões normais e outro para o cálculo das tensões de corte, tal como referido no início do presente capítulo. Não obstante esta diferença, verificaram-se, como acima referido, resultados muito bons tanto no exemplo apresentado neste capítulo como nos restantes apresentados no Anexo A.1.

Foram ainda estudados dois exemplos de lajes armadas em cruz, sendo o primeiro uma laje simplesmente apoiada nos quatro bordos e o segundo uma laje encastrada em três bordos com um bordo livre, onde se aproveitou a oportunidade para comparar os resultados obtidos pelo programa DesignSlab com uma implementação para a determinação de armaduras em cascas e lajes desenvolvida por Lourenço (1992). Quanto ao primeiro exemplo os resultados no que toca ao diagrama de armadura superior segundo a direcção y correspondente ao corte efectuado junto ao bordo, apresentam algumas particularidades devido essencialmente à variação brusca de alguns valores constatados junto aos cantos, diferindo assim um pouco dos resultados apresentados por Lourenço. No entanto, essas particularidades são consequência das variações também ocorridas nos momentos torsores, que tratando-se da zona dos cantos, verificou-se que o dimensionamento depende praticamente apenas desses momentos, sendo que, se iriam forçosamente repercutir nos mapas de armaduras. Todavia, face a esta situação e, tendo em linha de conta que essas variações foram originadas apenas por alguns nós da malha de elementos finitos, considera-se que os resultados são viáveis partindo do pressuposto que o utilizador fará uma análise crítica dos resultados obtidos, o que para o caso em concreto, seria tomar como referência um valor que representasse de forma harmoniosa a zona do canto, como se procedeu.

Quanto ao segundo exemplo, constatou-se uma plena correlação entre os resultados obtidos pelo programa DesignSlab e os homólogos obtidos por Lourenço (1992). Note-se que os momentos torsores para este segundo exemplo não apresentam variações bruscas, o que consequentemente também não se verificaram nos gráficos de armaduras e de tensões de compressão nas bielas de betão.

Assim sendo, e tendo em linha de conta as considerações constatadas, pode-se afirmar que o programa DesignSlab desenvolvido no presente trabalho é viável para a determinação de armaduras em lajes maciças analisadas pelo MEF e submetidas a um campo de momentos genérico.

5

APLICAÇÃO DO CÓDIGO DESENVOLVIDO AO DIMENSIONAMENTO DE ARMADURAS EM LAJES

5.1. INTRODUÇÃO

Após a validação do programa DesignSlab, torna-se então oportuno a aplicação desta ferramenta a vários tipos de lajes, de forma a ilustrar a sua aplicabilidade e interesse prático, uma vez que em casos de geometrias complexas e ocorrência de momentos torsores importantes a utilização de tabelas de cálculo torna-se inviável.

Assim sendo, neste capítulo serão estudados sete exemplos de lajes, sendo que os 4 primeiros têm como objectivo a verificação das faixas de armaduras e correspondente escalonamento sugeridas por regras de dimensionamento prático muito correntes, normalmente as do Montoya (2000) e da Norma Britânica BS8110 (1985). Quanto a estes dois exemplos serão primeiramente analisados e dimensionados segundo estes procedimentos expeditos, e posteriormente pelo programa desenvolvido DesignSlab, sendo feita a devida comparação. No que toca aos restantes 3 exemplos, procurou-se estudar lajes com características especiais, principalmente em termos de geometria e apoios, com actuação de cargas pontuais e com ocorrência de grandes aberturas, nos quais se constata a ocorrência de elevados momentos torsores.

Com o decorrer das aplicações é efectuada uma disposição escalonada das armaduras, segundo o ponto de vista do autor. Esse escalonamento é simplesmente qualitativo, tendo como principal objectivo mostrar a praticabilidade no uso do programa DesignSlab para o dimensionamento de lajes maciças.

Por fim, apresentam-se as conclusões finais a retirar deste capítulo.

5.2. EXEMPLOS

No que respeita à abordagem de cada exemplo, é efectuada uma análise elástica linear no programa comercial Robot Millennium, de forma a constatar a presença e preponderância dos momentos flectores e torsões, a partir dos quais se poderá efectuar dimensionamento das correspondentes armaduras. Para cada exemplo é efectuada um pré-dimensionamento de forma a respeitar as verificar as condições essenciais ao bom desempenho estrutural de lajes, nomeadamente o estado limite de deformação e a ocorrência de momentos reduzidos na gama $\mu \in [0,10 - 0,15]$.

Para todos os exemplos é considerado um betão C20/25, um aço S400 e um coeficiente de Poisson de $\nu=0.2$.

5.2.1. EXEMPLO 1 – LAJE ENCASTRADA NOS 4 BORDOS, SEGUNDO MONTROYA

Este exemplo visa a metodologia de análise e dimensionamento de lajes que recorre às tabelas e regras do Montroya (2000). Assim considera-se uma laje encastrada nos quatro lados, de dimensões $5.0 \times 7.0 \text{ m}^2$, sujeita a uma carga de cálculo de 15.0 kN/m^2 , incluindo o peso próprio, ilustrada na Figura 5.1.

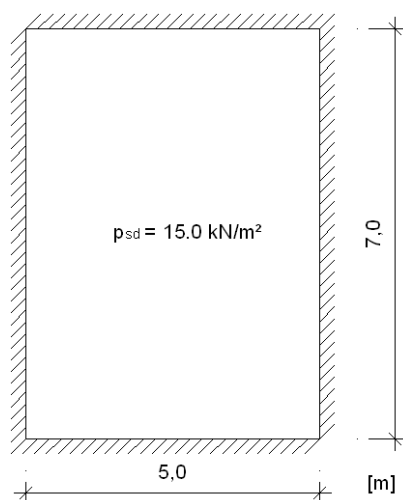


Fig. 5.1 – Laje encastrada nos 4 bordos

No dimensionamento das lajes maciças há três verificações essenciais a efectuar para garantir o bom desempenho e segurança estrutural:

- Deformação: $\frac{1}{d} \leq k_{gs} k_T k_l \lambda_0$
- Esforço Transverso: $V_{Rd,c} \geq V_{sd}$
- $\mu = 0,10 - 0,15$

Através do controlo da deformação, o qual é preconizado no EC2 (ver Cap. 7.4), pré-dimensiona-se a espessura da laje:

$$\Rightarrow \frac{l}{d} \leq k_{os} k_T k_i \lambda_0 \text{ com } \lambda_0 = 26 \text{ e admitindo } k_{os} = 1.4$$

$$\Leftrightarrow d \geq \frac{500}{26 \times 1.4} = 0,13 \Rightarrow \begin{cases} h = 0,15\text{m} \\ d = 0,12\text{m} \end{cases}$$

Considerando-se que $p_{sd} = 15\text{kN/m}^2$ e $l_y/l_x = 5/7 = 0,714$, segundo as tabelas do Montoya (2000) os momentos flectores presentes na laje são (ver convenções na Figura 5.2):

$$\begin{cases} m_y^+ = 12,48\text{kN.m/m} \\ m_x^+ = 6,43\text{kN.m/m} \\ m_y^- = 27,38\text{kN.m/m} \\ m_x^- = 21,70\text{kN.m/m} \end{cases}$$

Donde resultam as seguintes armaduras

$$\begin{cases} \mu = \frac{12,48}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,065 \Rightarrow \omega = 0,068 \Rightarrow A_{sy}^+ = 3,12\text{cm}^2/\text{m} \\ \mu = \frac{6,43}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,034 \Rightarrow \omega = 0,036 \Rightarrow A_{sx}^+ = 1,65\text{cm}^2/\text{m} \\ \mu = \frac{27,375}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,15 \Rightarrow \omega = 0,167 \Rightarrow A_{sy}^- = 7,66\text{cm}^2/\text{m} \\ \mu = \frac{21,70}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,11 \Rightarrow \omega = 0,119 \Rightarrow A_{sx}^+ = 5,46\text{cm}^2/\text{m} \end{cases}$$

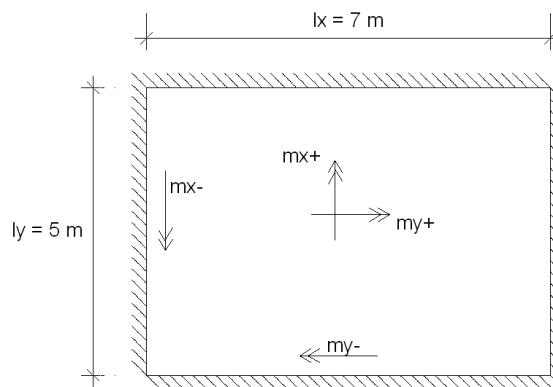


Fig. 5.2 – Visualização da representação dos momentos segundo Montoya (2000)

O modo como estas armaduras deverão ser posicionadas, segundo as tabelas do Montoya (2000), visualiza-se na Figura 5.3. Nesta figura:

- A_{bx} é a armadura inferior paralela ao lado l_x
- A_{tx} é a armadura superior paralela ao lado l_x
- A_{by} é a armadura inferior paralela ao lado l_y
- A_{ty} é a armadura superior paralela ao lado l_y

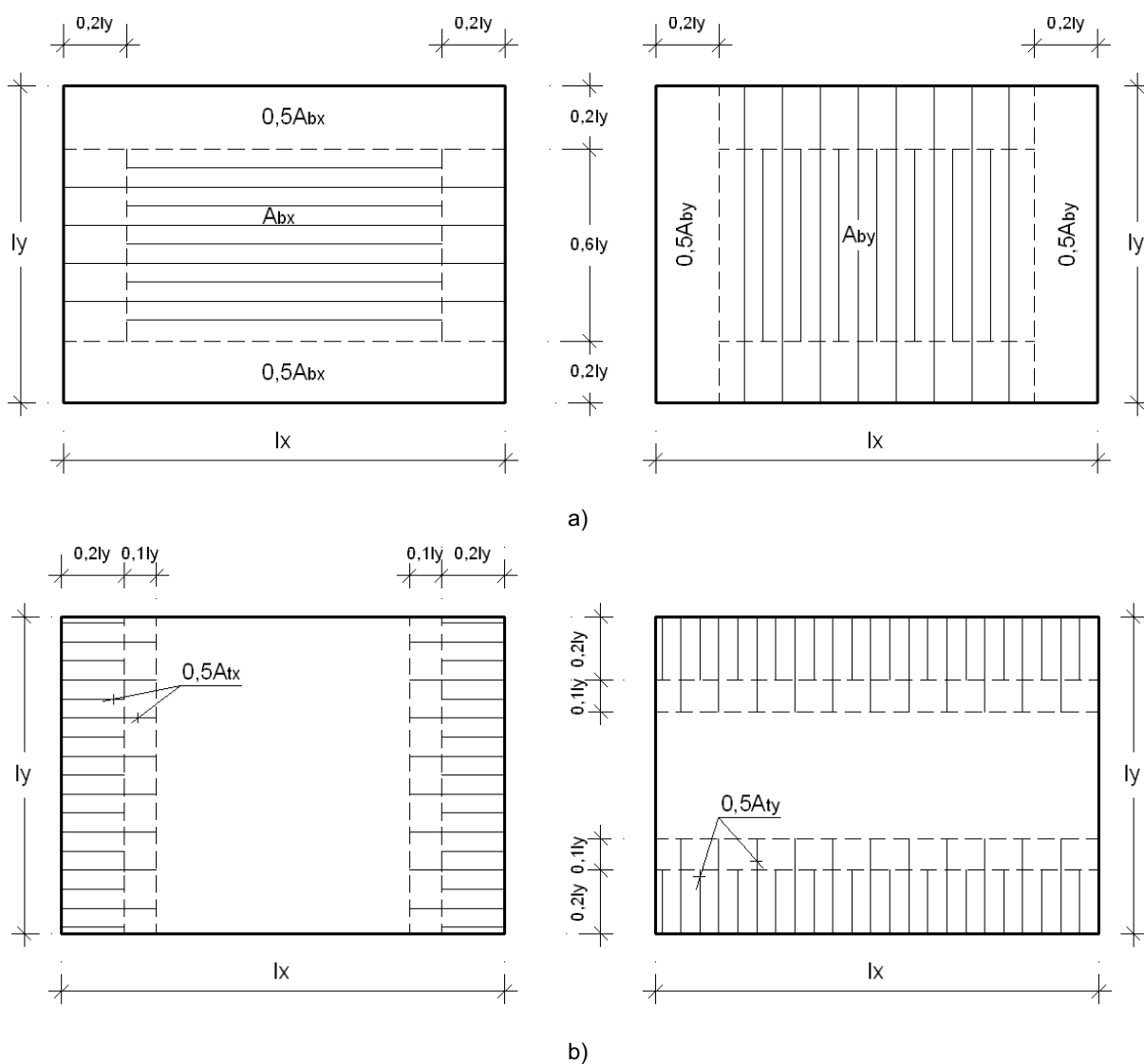


Fig. 5.3 – Disposição da armadura segundo as tabelas do Montoya (2000); a) Disposição da armadura inferior; b) Disposição da armadura superior

Nas zonas dos cantos, segundo as tabelas do Montoya (2000), deve-se complementar as armaduras principais numa zona quadrada de lado $0,2l_y$, sendo l_y o menor vão, com uma malha ortogonal colocada tanto na camada superior como na inferior, com 75% da máxima armadura principal do vão $A_{s,max}$ da laje, tal como ilustrado na Figura 5.4.

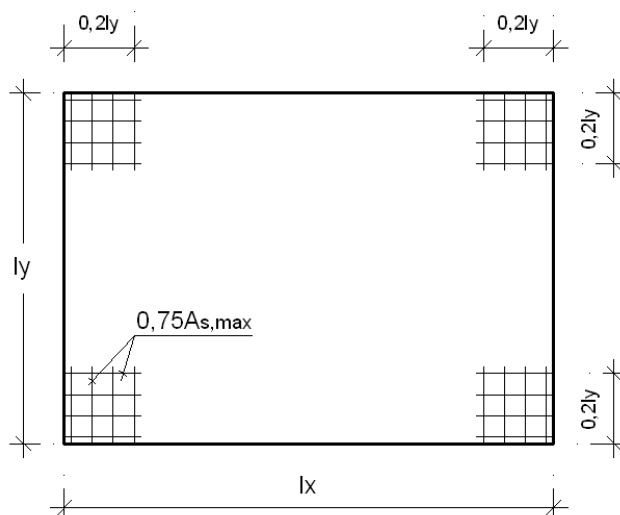


Fig. 5.4 – Armaduras de canto (camadas superior e inferior)

Desta forma obtém-se um dimensionamento e respectivo escalonamento das armaduras segundo uma análise baseada no Método de Montoya (2000).

Com o intuito de determinar a disposição das armaduras decorrentes da utilização do programa desenvolvido e, posterior comparação com as decorrentes das disposições associadas às tabelas do Montoya (2000), apresenta-se uma análise efectuada pelo programa DesignSlab.

A partir do Robot Millennium obtiveram-se os esforços ilustrados na Figura 5.5. Nesta figura constata-se que os valores dos momentos máximos obtidos segundo a metodologia de Montoya estão em plena concordância com os obtidos no programa Robot Millennium. Segundo este programa comercial, os valores dos momentos máximos positivo e negativo são 12,78kN.m/m e 27,08kN.m/m para direcção x , respectivamente e, 6,82kN.m/m e 21,06kN.m/m para a direcção y , respectivamente, os quais correspondem respectivamente a 12,48kN.m/m, 27,38kN.m/m, 6,43kN.m/m e 21,70kN.m/m, segundo Montoya (2000).

Pelos mapas de momentos ilustrados na Figura 5.5 verificam-se explicitamente as zonas de maior concentração de esforços, as quais corresponderão obviamente àquelas com maior necessidade de armadura e também às zonas que poderão condicionar o dimensionamento devido à verificação das compressões nas escoras de betão. As zonas associadas a estas considerações são os bordos encastrados e a zona central da laje em estudo.

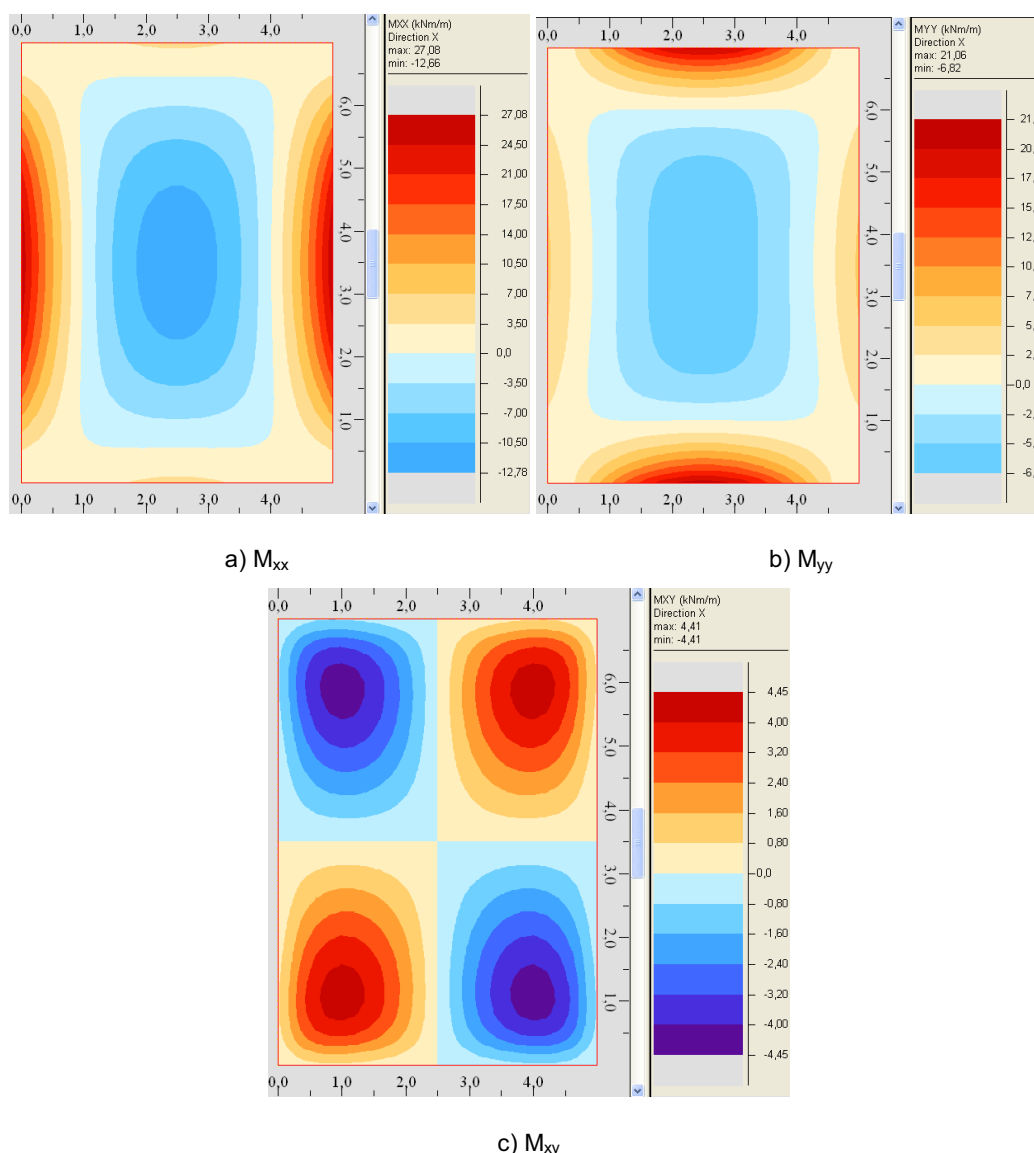


Fig. 5.5 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}

Neste tipo de laje são os momentos flectores que determinam o comportamento estrutural e, consequentemente o dimensionamento, sendo que os momentos torsores não apresentam grande relevância.

Através do programa DesignSlab, obtiveram-se as distribuições de armaduras necessárias nas direcções x e y e as tensões máximas instaladas no betão. Na Figura 5.6 encontram-se os resultados obtidos no que respeita às armaduras. Nesta figura assinalam-se também as faixas de armaduras e o respectivo escalonamento segundo as regras de Montoya, sendo que o valor máximo de armaduras a colocar em cada direcção nas camadas inferior e superior segundo as direcções x e y são representados pelas letras A, B, C e D, respectivamente. Neste exemplo, bem como à imagem dos próximos três, as faixas de armaduras serão obtidas em função do Regulamento em estudo (Montoya ou Norma

Britânica BS 8110) para constatar até que ponto as regras práticas de dimensionamento e disposição de armaduras desses Regulamentos se enquadram nos resultados obtidos pelo programa DesignSlab.

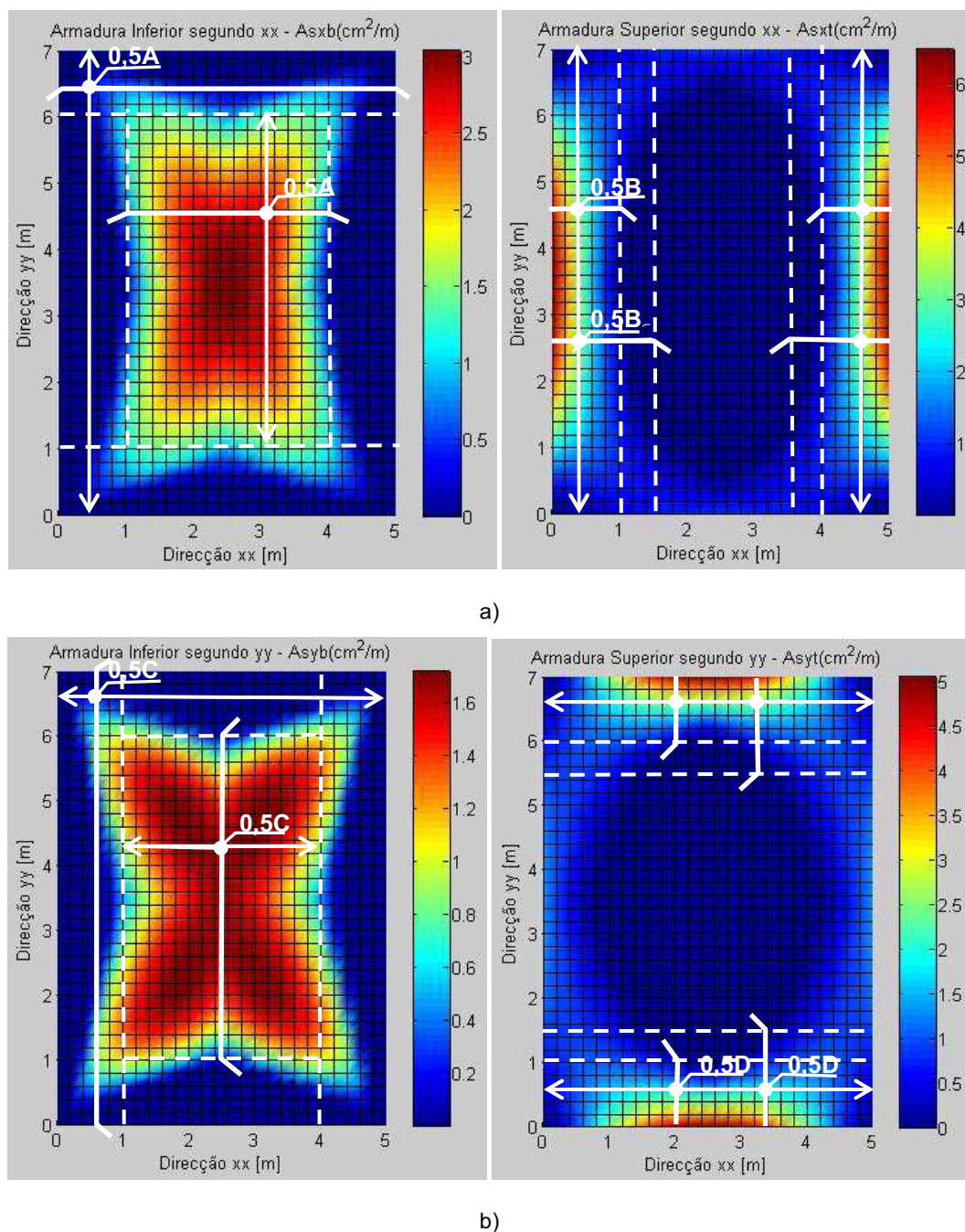


Fig. 5.6 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y

Tal como acima mencionado, verifica-se pela Figura 5.6 que com o DesignSlab as zonas mais armadas estão em concordância com as homólogas no que toca aos momentos flectores ilustrados na Figura 5.5. Os momentos torsores estão mais evidenciados nos cantos, no entanto dado seu baixo valor não

influenciam o dimensionamento, como se constata pela Figura 5.6, onde se verificam baixas necessidades de armaduras nessas zonas.

Verifica-se pela análise da Figura 5.6 que as faixas de armaduras e o respectivo escalonamento segundo as regras de Montoya se enquadram perfeitamente nos gráficos de armaduras obtidos, verificando-se que a passagem da totalidade da armadura para metade ocorre de forma adequada e segura, segundo o DesignSlab.

Quanto às tensões instaladas no betão, apresenta-se na Figura 5.7 duas distribuições com as tensões na camada superior e inferior. Constata-se uma vez mais a preponderância dos momentos flectores pela análise das tensões do betão na camada inferior, que estão em sintonia com as distribuições dos momentos flectores segundo as direcções x e y , evidenciando maiores tensões juntos aos bordos. Na zona central dos mapas de tensões na camada superior, verifica-se também maior concentração de tensões, sendo no entanto de valor mais baixo do que o apresentado na camada inferior. Evidencia-se também a influência dos momentos torsores, constatando-se nas zonas superiores dos cantos uma concentração de tensões, embora de valor reduzido quando comparadas com as da camada inferior.

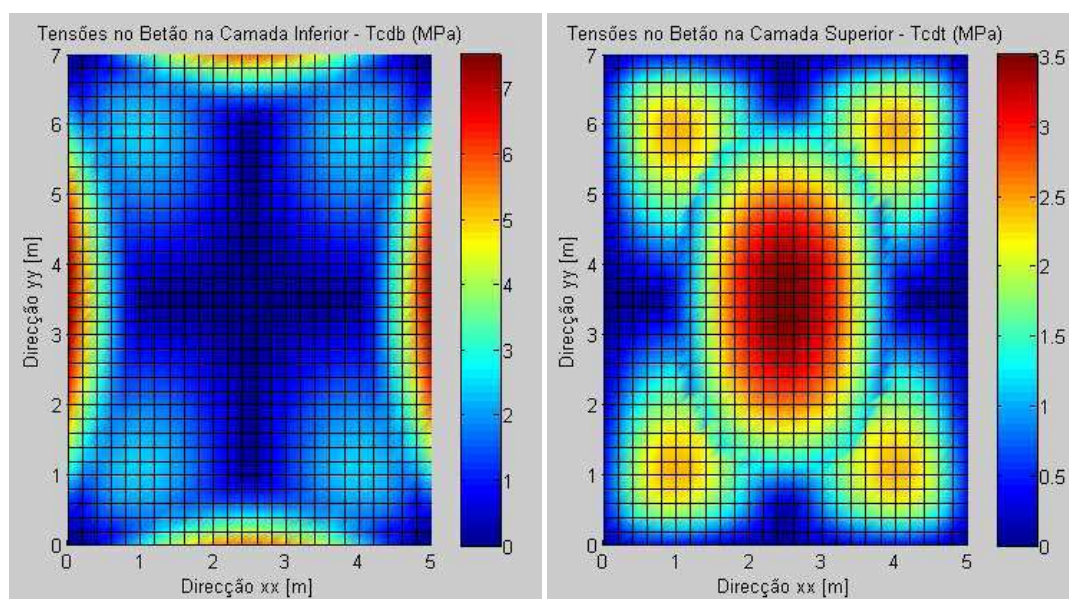


Fig. 5.7 – Tensões no betão

Neste exemplo, pela análise das Figuras 5.5, 5.6 e 5.7 constata-se uma influência determinante dos momentos flectores no comportamento estrutural e, consequentemente do correspondente dimensionamento da laje. Na Figura 5.7, no gráfico das tensões no betão na camada inferior, constata-se as orientações das tensões principais, a partir da “cruz” existente na zona central da laje, indicando a trajectória dessas tensões, que são praticamente originadas pelos momentos flectores.

5.2.2. EXEMPLO 2 – LAJE ENCASTRADA NOS 4 BORDOS, SEGUNDO A NORMA BRITÂNICA BS 8110 (1985)

O exemplo analisado pela Norma Britânica BS 8110 (NB) é precisamente o mesmo que o apresentado na Figura 5.1. A metodologia segundo esta Norma pressupõe uma redistribuição dos momentos negativos na laje, pelo que de forma a materializar esse aspecto, considerou-se uma laje simplesmente apoiada onde se introduziu posteriormente nos bordos os momentos obtidos pelas tabelas da NB em estudo, como se verá mais à frente na análise efectuada pelo programa DesignSlab.

Assim sendo, os momentos obtidos segundo a NB são representados na Figura 5.8.

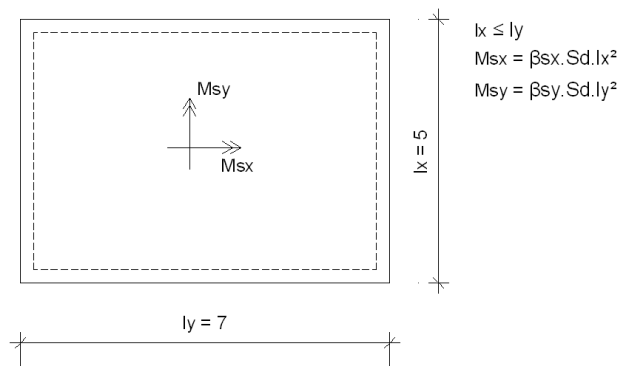


Fig. 5.8 – Representação dos momentos segundo a metodologia da Norma Britânica BS 8110

Sendo a relação $l_y/l_x = 7/5 = 1,4$, vem que:

$$\begin{cases} M_{sx}^+ = 14,625 \text{ kN.m / m} \\ M_{sx}^- = 19,125 \text{ kN.m / m} \\ M_{sy}^+ = 9,0 \text{ kN.m / m} \\ M_{sy}^- = 12,0 \text{ kN.m / m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = \frac{14,625}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,076 \Rightarrow \omega = 0,080 \Rightarrow A_{sx}^+ = 3,67 \text{ cm}^2 / \text{m} \\ \mu = \frac{19,125}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,10 \Rightarrow \omega = 0,108 \Rightarrow A_{sx}^- = 4,95 \text{ cm}^2 / \text{m} \\ \mu = \frac{9,0}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,047 \Rightarrow \omega = 0,049 \Rightarrow A_{sy}^+ = 2,25 \text{ cm}^2 / \text{m} \\ \mu = \frac{12,0}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,063 \Rightarrow \omega = 0,065 \Rightarrow A_{sy}^- = 3,00 \text{ cm}^2 / \text{m} \end{cases}$$

A disposição das armaduras inferiores segundo a NB é materializada através das faixas representadas na Figura 5.9. Segundo a NB, nas faixas centrais coloca-se a armadura para os momentos máximos e nas faixas laterais coloca-se a armadura mínima, que é cerca de $0.15 \times d \times b = 0.15 \times d$.

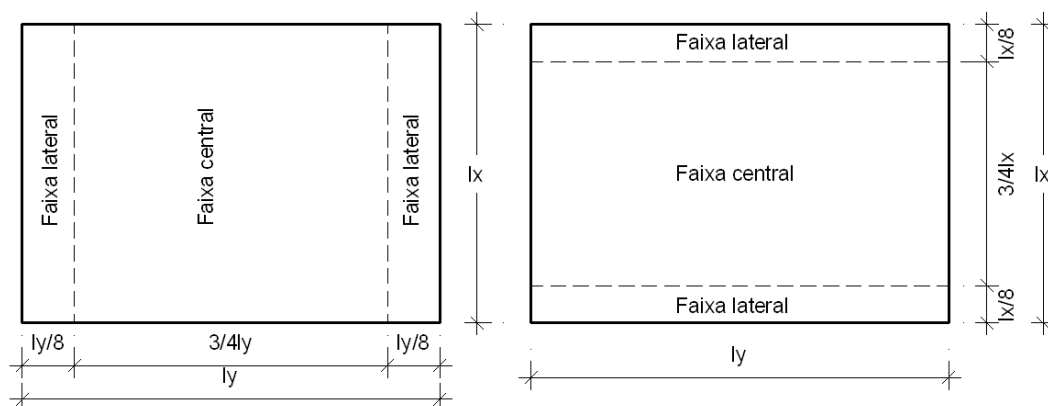


Fig. 5.9 – Divisão da armadura inferior em faixas

Segundo a NB também há necessidade de se ter em atenção às zonas dos cantos das lajes. Deste modo, na Figura 5.10 visualiza-se as disposições das armaduras de canto segundo a NB.

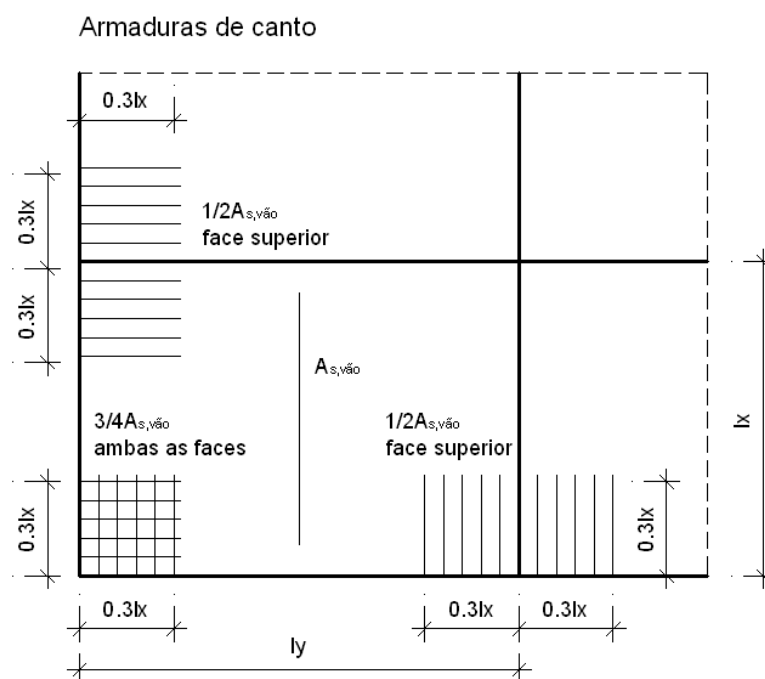


Fig. 5.10 – Armaduras de canto

Ainda no que respeita a disposições das armaduras, apresenta-se na Figura 5.11 as regras simplificadas para a dispensa de armaduras em lajes segundo a Norma em estudo.

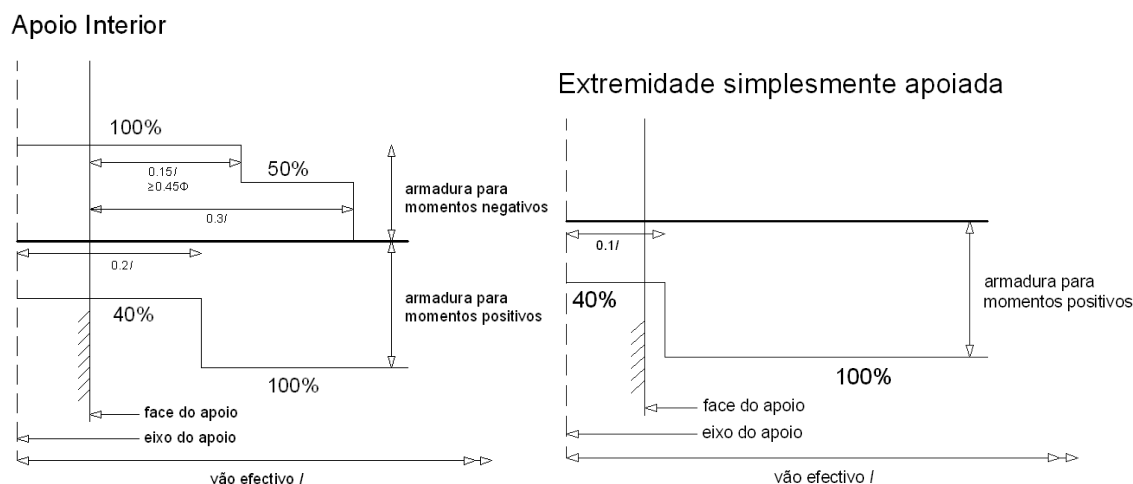


Fig. 5.11 – Regras simplificadas para dispensa de armaduras em lajes

Como atrás citado, a metodologia da Norma Britânica BS 8110 pressupõe uma redistribuição de momentos, sendo deste modo, necessário adoptar um artifício para que se possa analisar esta laje no programa Robot Millennium. Assim sendo, este artifício passa por introduzir-se no Robot Millennium a acção distribuída juntamente com os momentos de bordo $M_{sx}^- = 19,125 \text{ kN.m}$ e $M_{sy}^- = 12,0 \text{ kN.m}$ numa estrutura simplesmente apoiada, tal como representados na Figura 5.12. Desta forma consegue-se que os momentos nos bordos encastrados sejam os fornecidos pelas tabelas da NB, fazendo com que o Robot Millennium calcule a estrutura como estivesse a efectuar uma redistribuição de esforços.

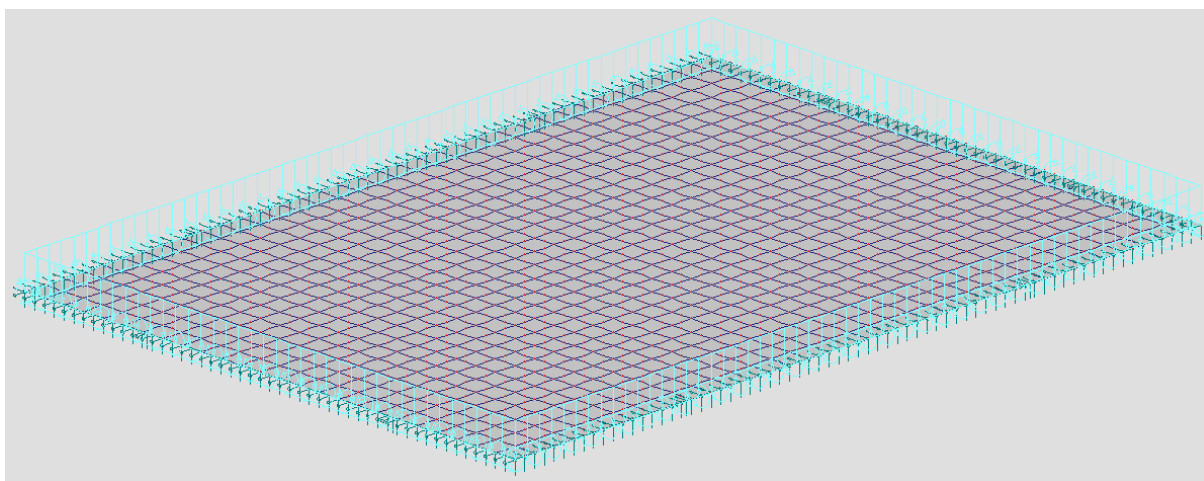


Fig. 5.12 – Representação dos momentos redistribuídos introduzidos na laje

Então, para estas acções obtiveram-se os momentos ilustrados na Figura 5.13. Nos mapas desta figura verifica-se um agravamento dos momentos flectores positivos, derivados da redistribuição de momentos. No que toca aos momentos torsores também se constata um agravamento, embora não sendo suficiente para determinar o comportamento estrutural da estrutura.

Através destas distribuições de momentos pode-se compreender o funcionamento estrutural da laje, podendo-se deste modo prever onde a estrutura exigirá maior quantidade de armadura. Assim, analisando os três gráficos, facilmente se verifica que sendo os momentos torsores pouco relevantes, a estrutura apresentará um comportamento determinado pelos momentos flectores nas direcções ortogonais, x e y , tal como anteriormente se constatou aquando do estudo deste exemplo segundo Montoya.

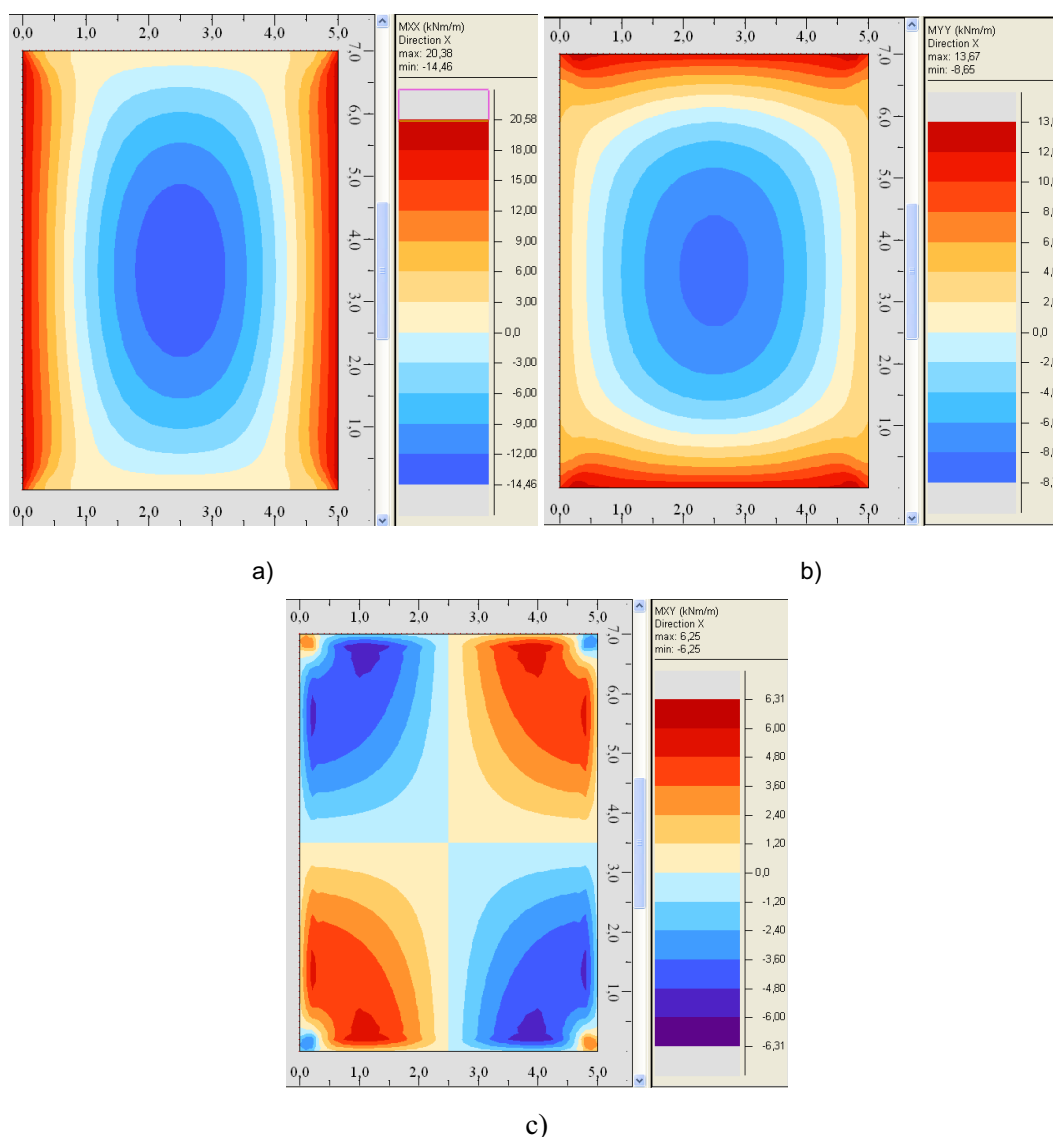


Fig. 5.13 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}

Com a utilização do programa DesignSlab determinaram-se as armaduras necessárias para a laje em estudo, ilustradas na Figura 5.14. Nesta figura, constata-se um aumento das armaduras na zona dos momentos positivos, em relação às homologas obtidas segundo Montoya, consequência da redistribuição dos momentos efectuadas. Por seu turno e, pela mesma razão, também as armaduras nas

zonas dos momentos negativos vieram diminuídas. Comparando com os resultados obtidos segundo o Montoya, verifica-se que nas zonas dos cantos há uma maior exigência de armaduras, fruto do ligeiro aumento dos momentos torsores. No entanto, as regras de dispensa da NB verificaram-se mais conservativas, assegurando deste modo, a cobertura daquelas zonas. Realça-se o facto de que se considerou que as medidas da laje são referentes ao vão efectivo l , ou seja, são medidas em relação aos eixos dos apoios. Assim, e uma vez que o escalonamento de armaduras apresenta uma dispensa para a metade à distancia de $0,15l$, admitiu-se então que a espessura do apoio seria de $0,30m$, sendo portanto a distância do eixo do apoio até à zona de dispensa de $0,15+0,15m$.

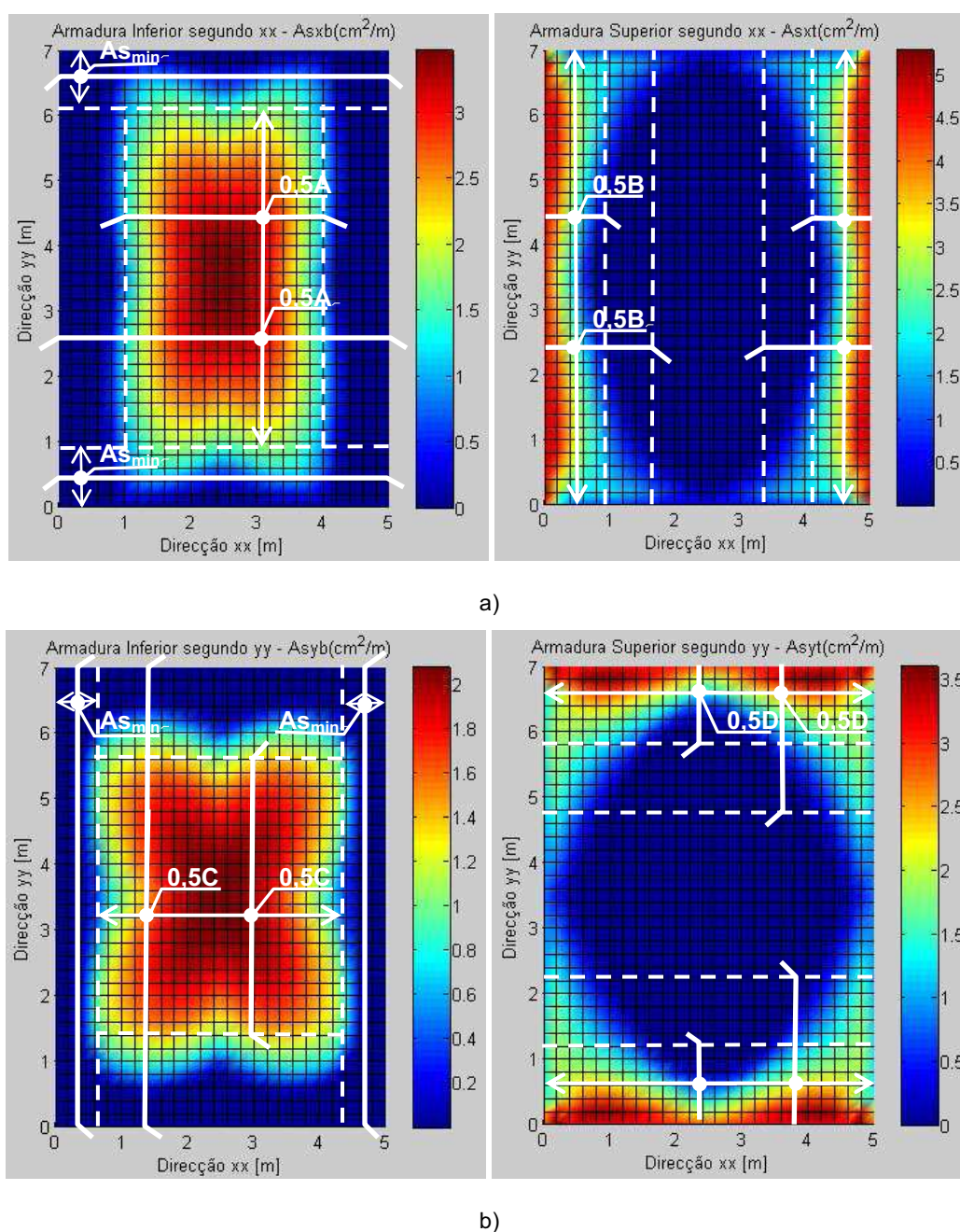


Fig. 5.14 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y

Comparando os resultados obtidos com os correspondentes segundo o Montoya, há dois aspectos a realçar. A dispensa da armadura segundo a NB é em função do vão efectivo da direcção em questão, revelando-se para o presente exemplo ser mais indicada, ao passo que o Montoya recomenda que seja efectuada em função do menor vão. Outro aspecto a reter depara-se com o facto de que segundo a NB as faixas laterais de armadura inferior serem compostas por uma armadura mínima, ao passo que segundo Montoya são metade do valor máximo de armaduras a colocar na zona central. Em casos em que o valor máximo é baixo não se revela importante, no entanto, para casos de estudo em que esse valor seja superior poderá revelar-se de certa forma um factor economizador. Quanto às tensões no betão, ilustram-se na Figura 5.15.

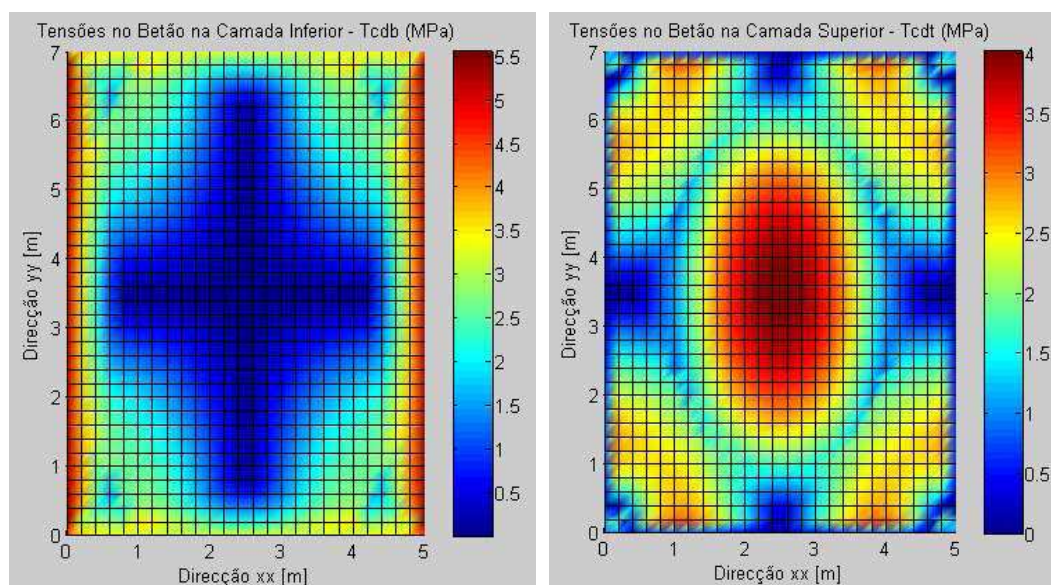


Fig. 5.15 – Tensões no betão

Com os gráficos de tensões no betão nas camadas superior e inferior, podem-se retirar algumas dilações, tais como constatar onde a estrutura estará mais solicitada. Repare-se que as zonas onde se constata maiores tensões no betão também são as que exigem maior valor de armadura na camada oposta. Embora as distribuições de tensões no betão nas zonas dos cantos sejam relativamente inferiores às verificadas na zona central para a camada superior e nos bordos para a camada inferior, verifica-se a influência dos momentos torsões nas zonas dos cantos, comprovada também pelos mapas de armaduras superiores constatados na Figura 5.14. Nestes verificam-se uma preocupação no dimensionamento das zonas do canto ao efectuar o escalonamento nos bordos para metade à distancia de $0,15l + 0,15$ m do eixo do apoio, mas sobretudo por se prolongar metade da armadura numa distancia de $0,3l + 0,15$ m ao eixo do apoio, como se visualiza nos mapas de armaduras superiores da Figura 5.14. Note-se que segundo Montoya, essas distâncias são $0,2l_y$ e $0,3l_y$, respectivamente, sendo l_y o menor vão, ao passo que na NB l é o vão referente à direcção a dimensionar. Observa-se assim pela Figura 5.14 que é na direcção do maior vão que se observam uma maior influência dos momentos torsões, verificando-se que as regras de dispensa da NB são mais adequadas, em detrimento das

homólogas previstas por Montoya. No entanto, no exemplo onde se aplicaram as regras de dispensa segundo Montoya não se evidenciava tanto a influência dos momentos torsores na direcção do maior vão, ou seja, na direcção y , como se ilustra na Figura 5.6.

5.2.3. EXEMPLO 3 – LAJE ENCASTRADA E SIMPLEMENTE APOIADA EM 2 BORDOS, SEGUNDO O MONTOKYA

Ainda com o objectivo de constatar as regras de dispensa de armaduras em lajes sugeridas pelos métodos de Montoya e pela NB, considerou-se o estudo de uma laje encastrada em dois lados e simplesmente apoiada nos outros dois lados, de dimensões $5.0 \times 7.0 \text{ m}^2$, sujeita a uma carga de cálculo de 15.0 kN/m^2 , incluindo o peso próprio, ilustrada na Figura 5.16.

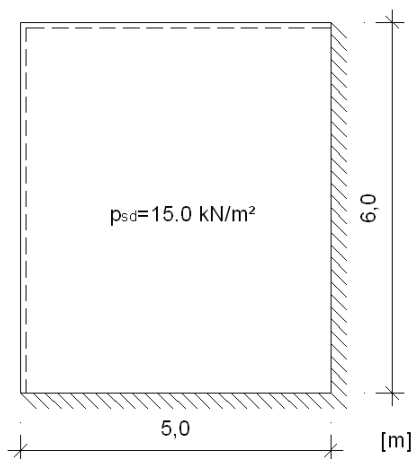


Fig. 5.16 – Laje encastrada em 2 bordos e simplesmente apoiada nos outros 2 bordos

No que respeita ao pré-dimensionamento, este exemplo encontra-se dentro dos mesmos parâmetros que no exemplo anterior, tratando-se portanto de uma laje com uma espessura de 0.15m.

Quanto à análise estrutural, na Figura 5.17 visualizam-se os mapas dos momentos flectores e torsores presentes na laje. Através desta análise pode-se constatar que também esta laje terá um comportamento determinado pelos momentos flectores segundo as direcções ortogonais x e y . No entanto, não obstante da predominância dos momentos flectores no comportamento estrutural da laje, verifica-se que os momentos torsores influenciam decisivamente a zona do canto formado pelos bordos simplesmente apoiados, uma vez que apresentam-se com valor superior ao verificado pelos momentos flectores, sendo essa diferença cerca do dobro. Nos cantos formados pelos bordos encastrado e simplesmente apoiado, embora assumindo valores superiores aos flectores, os momentos torsores não se revelam tão influentes.

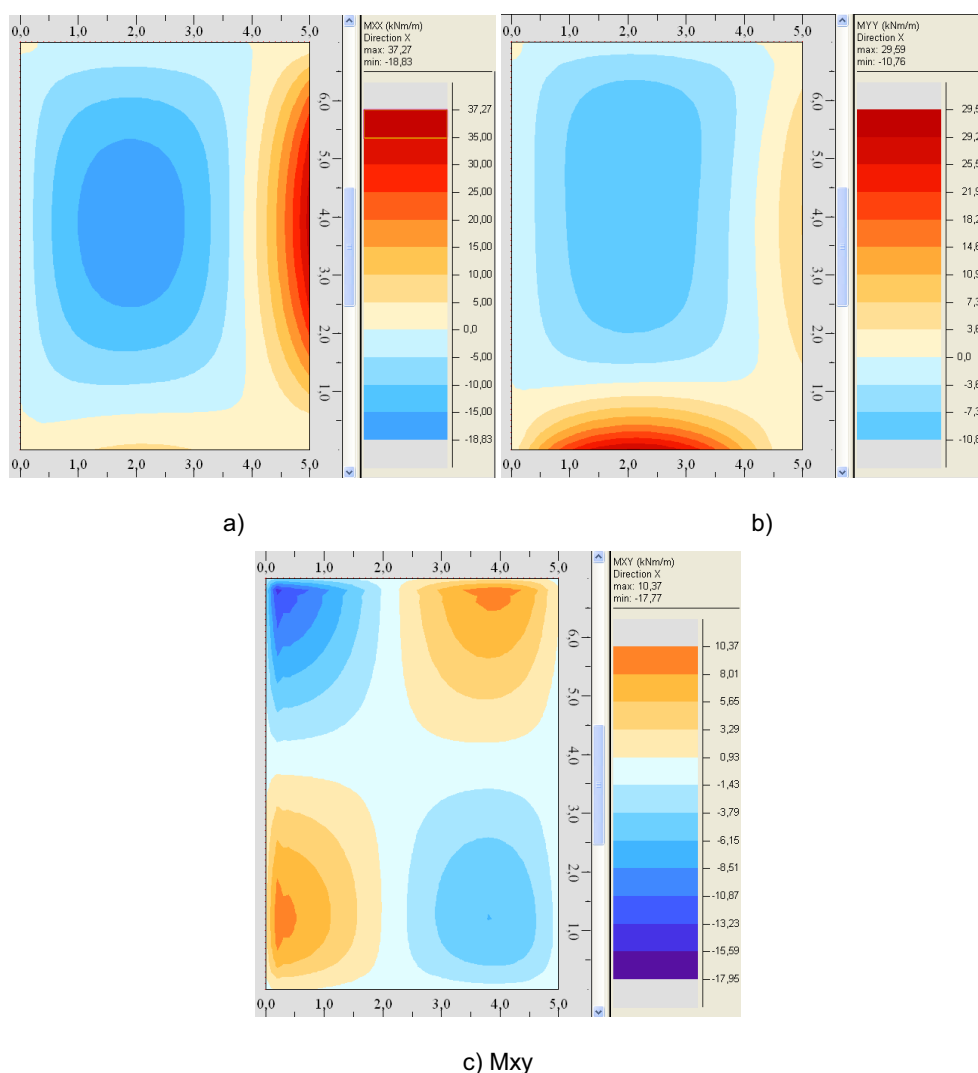


Fig. 5.17 – Momentos na laje; a) Mxx; b) Myy; c) Mxy

Apesar de se constatar que os momentos flectores terão um efeito preponderante no comportamento estrutural, verifica-se que os momentos torsores são significativos podendo influenciar o comportamento estrutural e consequentemente o dimensionamento em algumas zonas da laje. Tal constata-se no aparecimento de zonas de concentração de armaduras nos cantos tanto nas camadas superior como inferior, como se pode visualizar nos mapas da Figura 5.18, onde segundo Montoya, se deverá prover de uma malha ortogonal de armaduras de lado $0,2ly$ igual ou superior a 75% do valor máximo de armadura principal. Nesta constata-se também um deslocamento da necessidade de armaduras na camada inferior para junto dos lados simplesmente apoiados. Deste modo, e sendo as regras de dispensa de armaduras segundo Montoya fixadas previamente em função do menor vão, verifica-se a ocorrência de zonas menos abrangidas pelo dimensionamento proposto por Montoya, como se observa nos gráficos de armaduras inferiores, tanto segundo x como segundo y , onde a passagem da totalidade das armaduras para a metade se efectua um pouco prematuramente.

No entanto, realça-se que este aspecto não coloca em causa o bom comportamento estrutural, dada a grande capacidade deste tipo de estruturas na redistribuição de esforços. O que poderá acontecer é uma plastificação das armaduras em algumas secções segundo a direcção em causa, esgotando assim dessa

forma a capacidade resistente dessa secção, à qual a estrutura responderá com uma redistribuição de esforços nessa mesma direcção. Além do mais, caso a estrutura esgote-se a sua capacidade resistente numa direcção teria ainda capacidade para redistribuir na outra direcção, o que imputa a estas estruturas grande capacidade de resistência à rotura. Portanto, a plastificação local de algumas armaduras não causa nenhum problema estrutural, nem condiciona o seu comportamento.

Com este exemplo, se constata que a disposição e a dispensa de armaduras segundo Montoya se figura segura e adequada, apesar de serem fixadas previamente em função do vão menor, o que em determinados casos, como o presente, puder apresentar algumas incongruências que poderiam ser colmatadas tendo em atenção os resultados apresentados pelo programa DesignSlab desenvolvido no presente trabalho.

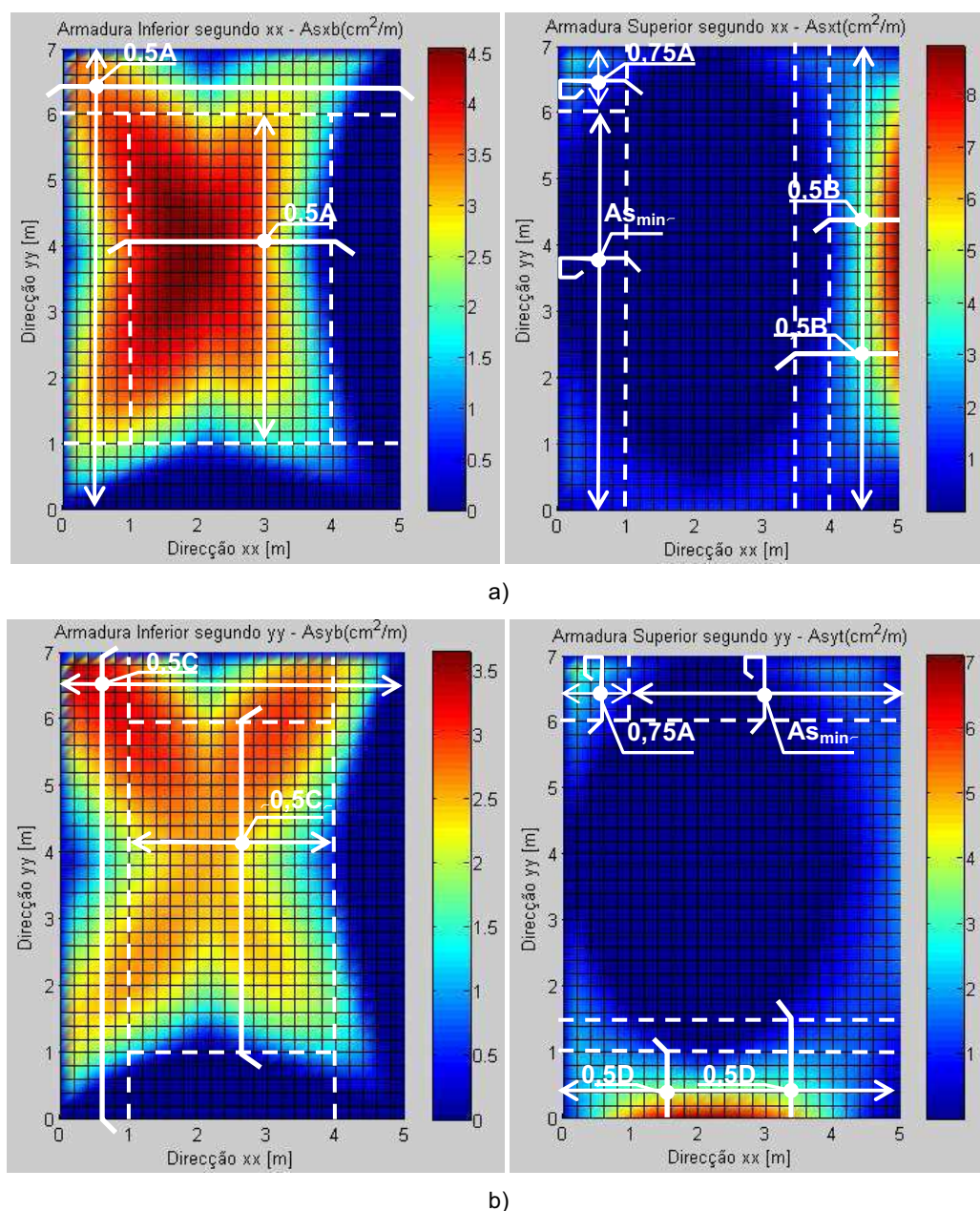


Fig. 5.18 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y

Repare-se que pelo tom de cor apresentado na zona dos cantos, se observa que se está perante um valor de cerca de $3,0\text{--}3,5 \text{ cm}^2 / \text{m}$, que por sua vez coincide com o valor sugerido por Montoya, que diz que nos cantos o valor da malha ortogonal a colocar nas camadas superior e inferior deverá ser igual ou superior a 75% do máximo valor de armadura principal, ou seja, $0,75 \times A = 0,75 \times 4,5 = 3,4 \text{ cm}^2 / \text{m}$. No que toca à malha ortogonal a colocar na camada inferior, apresenta-se a Figura 5.19 de forma a não sobrecarregar os gráficos da Figura 5.18, onde se visualiza claramente a necessidade das armaduras em causa.

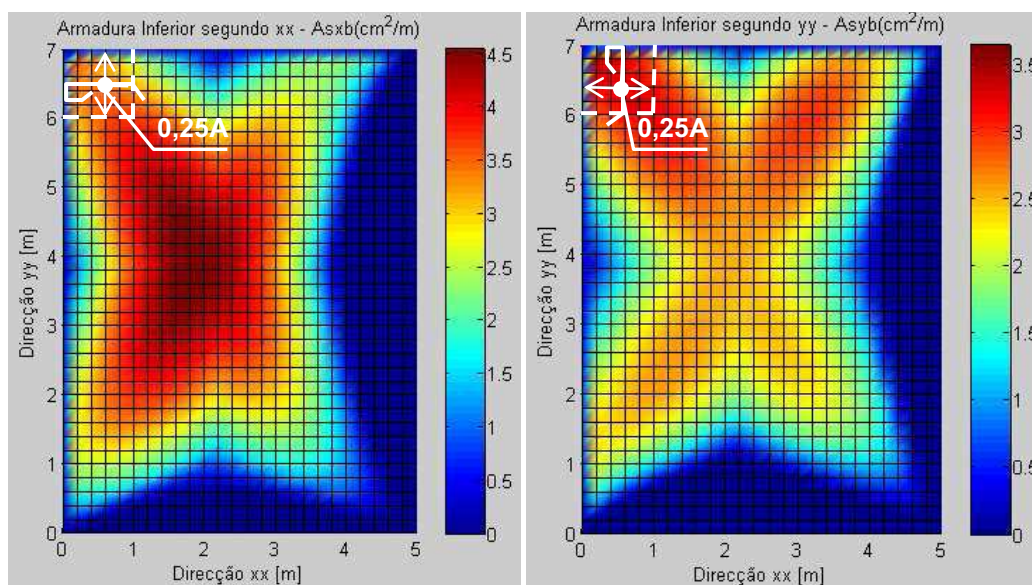


Fig. 5.19 – Visualização da malha ortogonal de armaduras na camada inferior

Repare-se que o valor a adoptar deverá ser no total de $0,75A$ segundo Montoya. Como no dimensionamento das faixas de armaduras inferiores foram dimensionados $0,5A$ em toda a laje, então no canto formado pelos bordos simplesmente apoiados para a camada inferior, adopta-se uma malha de armaduras ortogonais de lado $0,2l_y$ de forma a complementar o défice verificado, ou seja, $0,25A$, como se ilustra na Figura 5.19.

5.2.4. EXEMPLO 4 – LAJE ENCASTRADA E SIMPLEMENTE APOIADA EM 2 BORDOS, SEGUNDO A NORMA BRITÂNICA BS 8110 (1985)

Este exemplo de estudo segundo a NB é o mesmo analisado anteriormente pelo Método de Montoya apresentado na Figura 5.16. À semelhança do Exemplo 2, considerou-se uma laje simplesmente apoiada onde se introduziu posteriormente nos bordos encastrados os momentos obtidos pelas tabelas da NB em estudo. Assim sendo, em primeiro lugar obtêm-se os momentos segundo a NB, representados na Figura 5.20, a partir dos quais se retirará o valor daqueles para introduzir no Robot Millennium de forma a materializar a redistribuição.

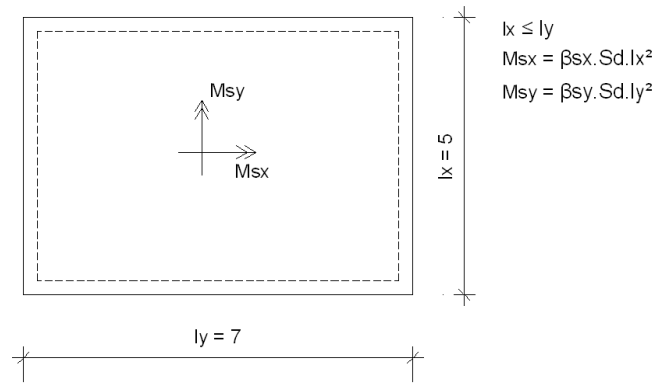


Fig. 5.20 – Representação dos momentos segundo a metodologia da Norma Britânica BS 8110

Sendo a relação $l_y/l_x = 7/5 = 1,4$, vem que:

$$\begin{cases} M_{sx}^+ = 19,875 \text{ kN.m / m} \\ M_{sx}^- = 26,625 \text{ kN.m / m} \\ M_{sy}^+ = 13,125 \text{ kN.m / m} \\ M_{sy}^- = 17,625 \text{ kN.m / m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = \frac{19,875}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,104 \Rightarrow \omega = 0,112 \Rightarrow A_{sx}^+ = 5,14 \text{ cm}^2 / \text{m} \\ \mu = \frac{26,625}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,139 \Rightarrow \omega = 0,154 \Rightarrow A_{sx}^- = 7,05 \text{ cm}^2 / \text{m} \\ \mu = \frac{13,125}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,069 \Rightarrow \omega = 0,073 \Rightarrow A_{sy}^+ = 3,35 \text{ cm}^2 / \text{m} \\ \mu = \frac{17,625}{1,0 \times 0,12^2 \times 13,3 \times 10^3} = 0,092 \Rightarrow \omega = 0,098 \Rightarrow A_{sy}^- = 4,49 \text{ cm}^2 / \text{m} \end{cases}$$

No que toca à disposição das armaduras inferiores e respectiva dispensa segundo a NB, pode-se analisar o Exemplo 2, no qual se apresentaram as regras sugeridas por essa Norma. Assim, com os valores dos momentos negativos obtidos para os dois bordos encastrados pela NB, calculou-se a laje pelo Robot Millennium onde se introduziram esses momentos na laje simplesmente apoiada, à imagem do Exemplo 2, materializando desta forma a redistribuição efectuada, ilustrada na Figura 5.21. À imagem das considerações proferidas em relação aos mapas dos esforços actuantes do Exemplo 3, também neste exemplo pode-se constatar pelos respectivos mapas das tensões no betão ilustrados na Figura 5.21, que a laje terá um comportamento determinado pelos momentos flectores segundo as direcções ortogonais x e y . Ainda de forma semelhante ao Exemplo 3, como seria de esperar, verifica-se que os momentos torsores também influenciam decisivamente a zona do canto formado pelos

bordos simplesmente apoiados, uma vez que apresentam-se com valor superior ao verificado pelos momentos flectores, sendo essa diferença cerca do dobro. Nos cantos formados pelos bordos encastrado e simplesmente apoiado, embora assumindo valores superiores aos flectores, os momentos torsores não se revelam tão influentes. A diferença em relação ao exemplo anterior prende-se com a redistribuição dos momentos negativos, verificando-se deste modo valores destes momentos inferiores aos homólogos obtidos no Exemplo 3. Por seu turno, no que aos momentos positivos diz respeito, verifica-se um ligeiro agravamento comparativamente com os resultados constatados no exemplo anterior.

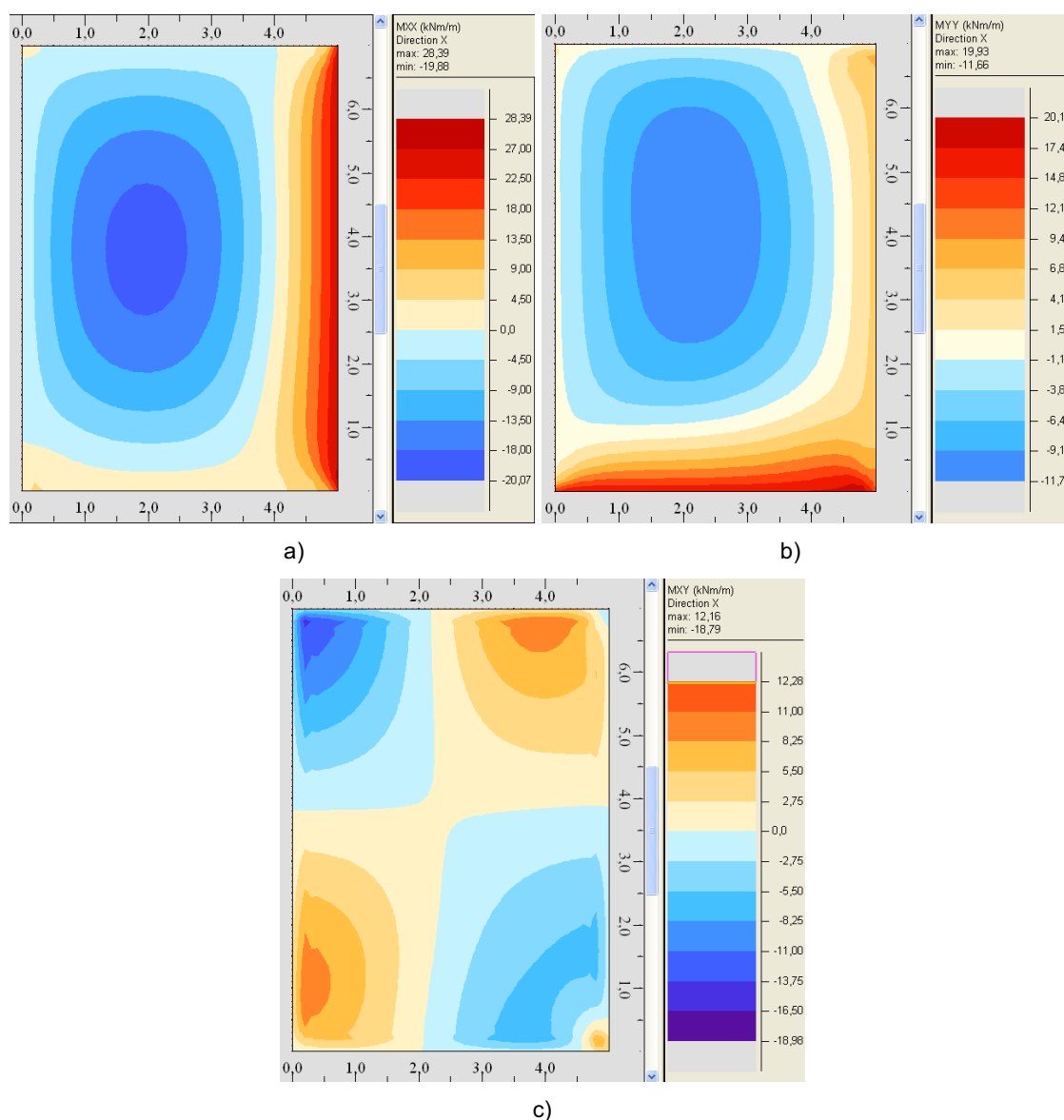


Fig. 5.21 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}

Com o programa DesignSlab, determinaram-se as armaduras da laje, as quais se podem visualizar na Figura 5.22. Segundo a NB, as faixas de armaduras e a correspondente dispensa das mesmas é

determinada em função do vão da direcção em causa. Assim, deste modo, constata-se de certa forma uma melhor distribuição das armaduras, principalmente na passagem da totalidade para a metade no que respeita às armaduras inferiores. No entanto, também se verificam alguns pequenos desajustes nessa passagem. No que toca à armadura mínima verifica-se também em algumas zonas que o seu valor é um pouco baixo – $As_{min} = 0,15 \times b \times d = 0,15 \times 0,12 = 1,8 \text{ cm}^2 / \text{m}$, justificando até por vezes a metade do valor máximo de armaduras.

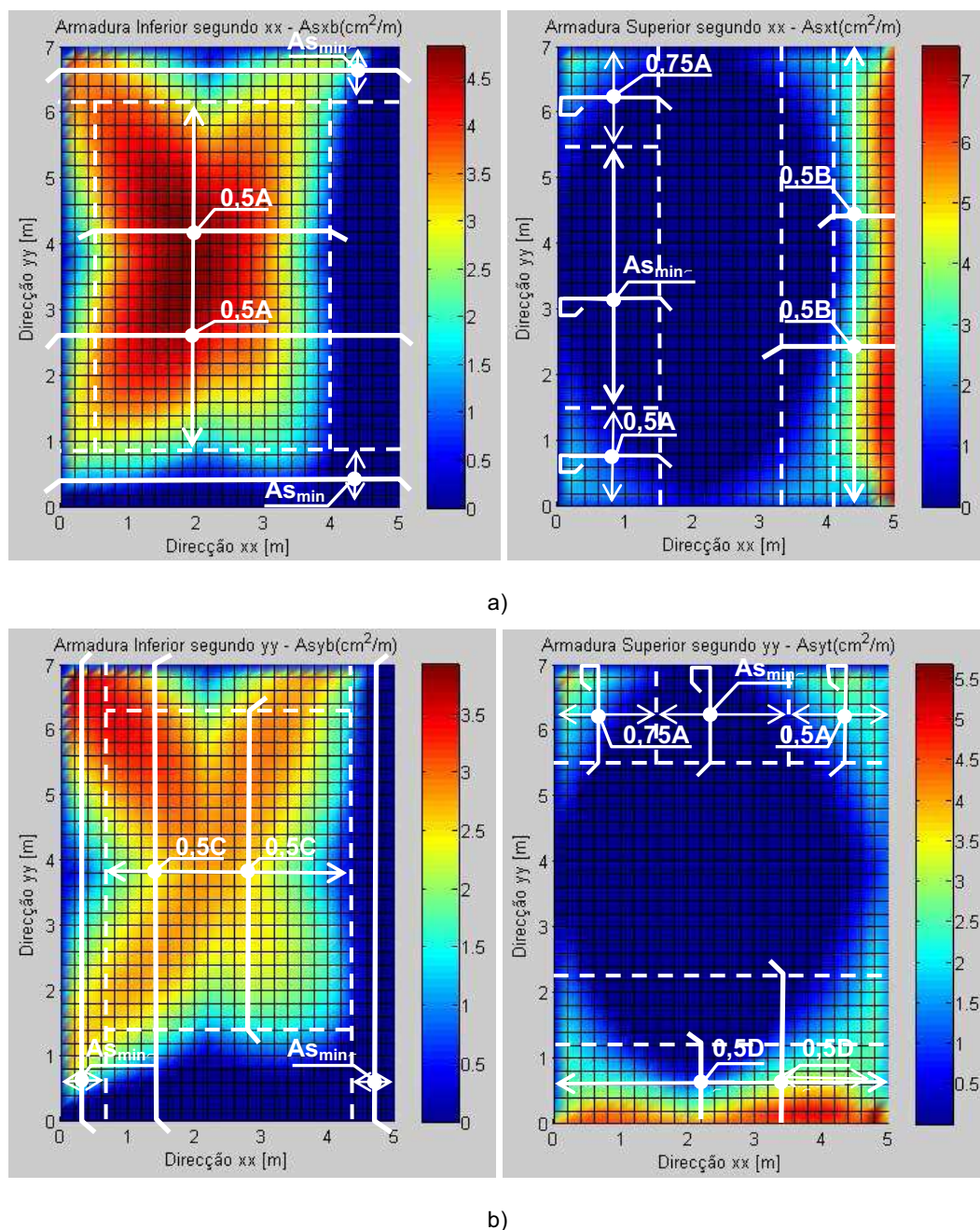


Fig. 5.22 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y

À semelhança da análise em 5.2.3, também aqui se verifica que o comportamento estrutural é comandado pelos momentos flectores. Contudo, os momentos torsores também aqui se apresentam com certo significado, influenciando o dimensionamento nas zonas dos cantos, como se visualiza tanto na Figura 5.22, acima apresentada, como na Figura 5.23, onde se realça esse efeito na camada inferior. Segundo a NB, deve-se prover essas zonas de uma malha ortogonal de armaduras de lado $0,3x$ igual a 75% e 50% do valor máximo de armadura principal positiva, nas zonas dos cantos formados pelos lados simplesmente apoiados e encastrado e simplesmente apoiado, respectivamente. Sendo $0,75A = 0,75 \times 5 = 3,75 \text{ cm}^2 / \text{m}$ e $0,5A = 0,5 \times 5 = 2,5 \text{ cm}^2 / \text{m}$, constata-se que os valores exigidos nos mapas de armaduras obtidos pelo DesignSlab são dessa ordem de grandeza, confirmando-se, obviamente, desta forma a aplicabilidade da Norma Britânica BS 8110 (1985).

Para a camada inferior, na zona do canto formado pelos bordos simplesmente apoiados, deve-se adoptar uma malha ortogonal de armaduras de lado $0,3x$ complementar, de forma que somada com a armadura mínima perfaçam o total de 75% do valor máximo da armadura principal positiva, como observado na Figura 5.23.

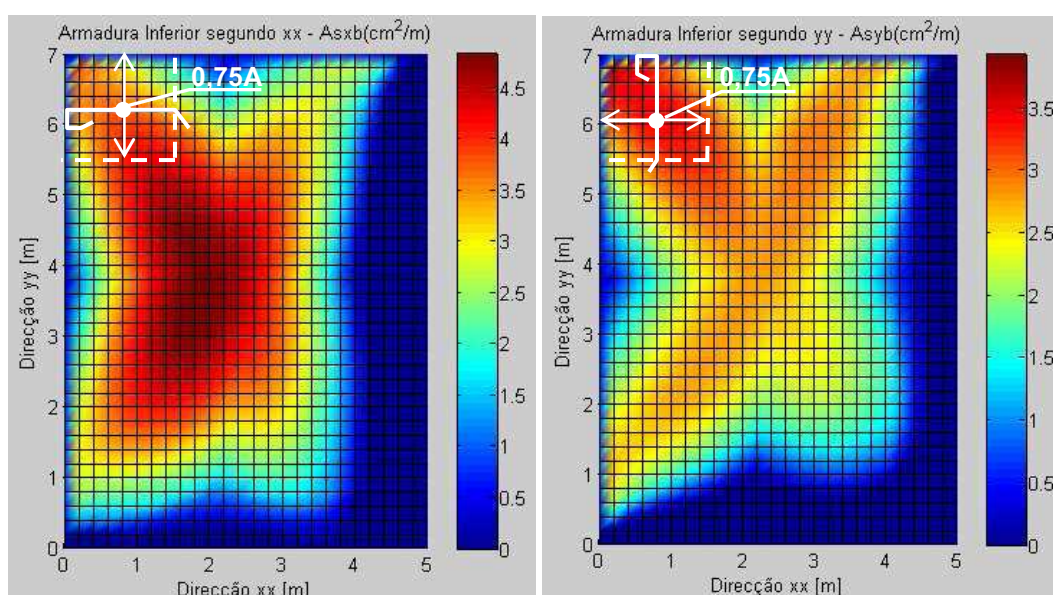


Fig. 5.23 – Visualização das armaduras de canto na camada inferior

Analisando estes exemplo, segundo a NB e, o anterior, segundo Montoya, constata-se que a passagem da totalidade das armaduras para a metade se efectua de forma mais eficiente segundo a NB, uma vez que é em função do vão da direcção a dimensionar, ao passo que Montoya sugere em função do menor vão. No entanto, segundo a NB, nas faixas laterais deve-se colocar uma armadura mínima, a qual se veio a verificar não ser a mais apropriada dado a necessidade de maior quantidade de armadura. Neste aspecto, Montoya sugere que as faixas laterais devem ser providas de metade da armadura principal do vão, o que se evidenciou mais apropriado. No entanto, tratando-se de lajes cujos valores de armadura principal sejam não muito altos, verifica-se que a metade dessa armadura quase se confunde com a armadura mínima, não sendo portanto, um aspecto relevante para esse tipo de lajes. Por sua vez, em

lajes cujo valor de armadura mínima difira bastante da metade da armadura principal do vão, essas considerações ganham relevo.

Ainda analisando estes dois últimos exemplos, constata-se que na zona dos cantos originados pelos lados encastrado e outro simplesmente apoiado, segundo a NB, devem-se ser providas de metade da armadura principal do vão nessa zona de lado $0,3lx$. Este aspecto é claramente evidenciado pelos mapas de armadura acima ilustrados na Figura 5.22 e 5.23. No entanto, este aspecto não é muito bem esclarecido por Montoya, o qual evidencia notavelmente os cantos formados por dois bordos simplesmente apoiados.

No que toca às distribuições das tensões instaladas no betão, apresenta-se a Figura 5.24 onde se visualizam. À imagem do que foi anteriormente dito, a partir destas distribuições, podem-se conhecer as zonas mais solicitadas e consequentemente as mais providas em termos de armadura. Repare-se nas zonas dos cantos, onde se notabilizam uma maior concentração de tensões, fruto da influência dos momentos torsores, que apesar de não comandarem o comportamento estrutural, apresentam-se com valores significativos de forma a condicionar determinadas zonas da estrutura. Na zona central e nos bordos encastrados, os valores das tensões são comandados pelos momentos flectores, os quais, neste exemplo, bem como nos anteriores, comandam o comportamento estrutural.

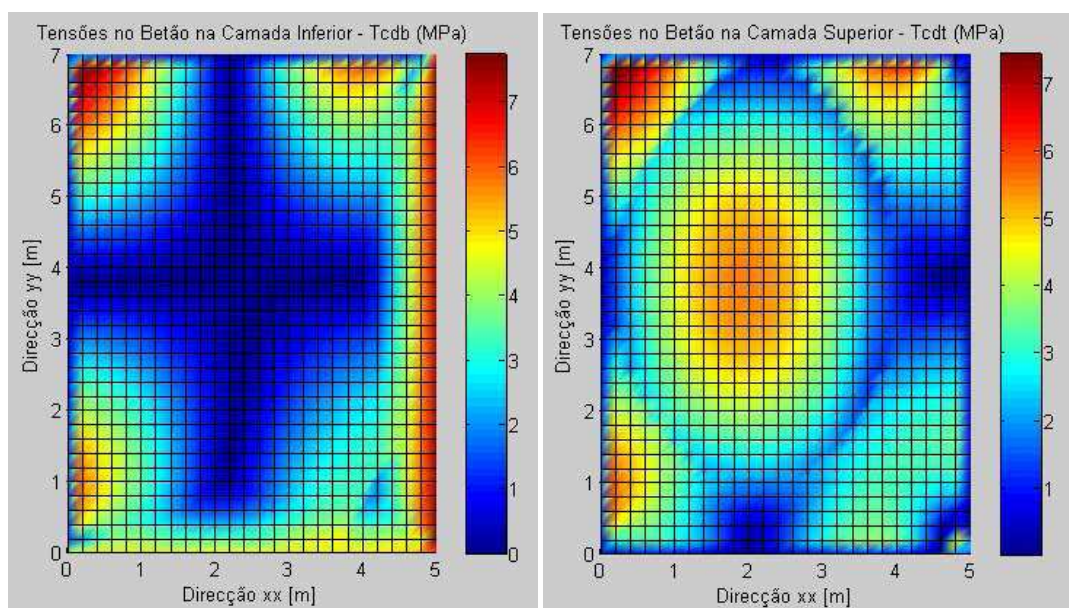


Fig. 5.24 – Tensões no betão

5.2.5. EXEMPLO 5 – LAJE ENCASTRADA EM 2 BORDOS E APOIADA NUM PILAR

Este exemplo materializa um dos objectivos do presente trabalho, que passa pela aplicação do programa desenvolvido a exemplos práticos com características especiais, de forma a demonstrar a aplicabilidade da implementação desenvolvida. Assim sendo, considera-se uma laje encastrada em

dois lados e apoiada num pilar de dimensões $5.0 \times 7.0 \text{ m}^2$, sujeita a uma carga de cálculo de 15.0 kN/m^2 , incluindo o peso próprio, ilustrada na Figura 5.25.

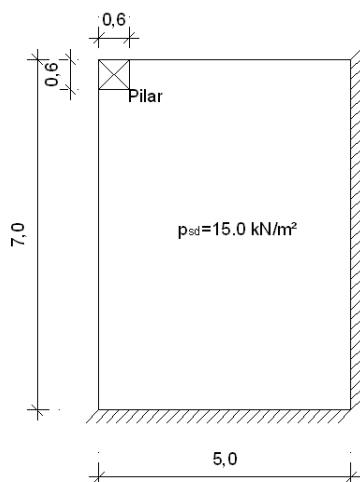


Fig. 5.25 – Laje encastrada em 2 bordos e apoiada num pilar

Em lajes maciças apoiadas em pilares há três verificações essenciais a controlar para o bom desempenho estrutural deste tipo de lajes:

- Deformação: $\frac{1}{d} \leq k_{os} k_T k_l \lambda_0$
- Punçoamento: $v_{Ed} < v_{Rd,c}$
- $\mu = 0,10 - 0,15$

Através do controlo da deformação pré-dimensiona-se a laje:

$$\Rightarrow \frac{1}{d} \leq k_{os} k_T k_l \lambda_0 \text{ com } \begin{cases} \lambda_0 = 18 \rightarrow \rho = 1,5\% \\ \lambda_0 = 26 \rightarrow \rho = 0,5\% \end{cases} \text{ e admitindo } k_{os} = 1.4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d \geq \frac{500}{26 \times 1,3} = 0,1984 \\ d \geq \frac{500}{26 \times 1,3} = 0,1374 \end{cases} \Rightarrow \text{seja } \begin{cases} d = 0,17 \text{ m} \\ h = 0,20 \text{ m} \end{cases}$$

Assim, após este pré-dimensionamento passa-se à verificação no que toca ao punçoamento para o qual se deve efectuar as seguintes verificações:

- No perímetro do pilar, ou no perímetro da área carregada, u_0 , não deve ser excedido o valor máximo da tensão de punçoamento.

$$v_{Ed} < v_{Rd,max}$$

- na secção de controlo, u_1 (ver a Figura 5.26 a)), a qual dista de $2d$ da face do pilar onde d representa a altura útil da laje, deve-se verificar que

$$v_{Ed} < v_{Rd,c}$$

No caso de v_{Ed} exceder o valor de $v_{Rd,c}$ para a secção de controlo considerada, deve-se adoptar-se uma armadura de punçoamento de acordo com o EC2 (ver 6.4.5).

Assim sendo vem que:

- para u_0

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0,6 + 0,6 = 1,20\text{m} \\ v_{Ed} = \frac{\beta \times V_{Ed}}{u_1 \times d} = \frac{1,5 \times 131,88}{1,20 \times 0,17} = 0,97\text{MPa} \\ v_{Rd,max} = 0,5 \cdot v \cdot f_{cd} = 0,5 \times 0,6 \times \left(1 - \frac{20}{250}\right) \times 13,3 = 3,67\text{MPa} > v_{Ed} = 0,97\text{MPa} \Rightarrow \text{O.K.} \end{array} \right.$$

- para u_1

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0,6 + 0,6 + \pi d = 3,08\text{m} \\ v_{Ed} = \frac{\beta \times V_{Ed}}{u_1 \times d} = \frac{1,5 \times 131,88}{3,08 \times 0,17} = 0,378\text{MPa} \\ v_{Rd,c} = C_{Rd,c} \cdot K \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} = 0,12 \times 2 \times (100 \times 0,003 \times 20)^{1/3} = 0,436\text{MPa} \\ v_{min} = 0,035 \cdot K^{2/3} \cdot f_{ck}^{1/2} = 0,035 \times 2 \times \sqrt{20} = 0,442\text{MPa} \\ v_{Rd,c} = v_{min} = 0,442\text{MPa} > v_{Ed} = 0,378\text{MPa} \Rightarrow \text{O.K.} \end{array} \right.$$

Uma vez que se está perante um pilar de bordo ou de canto, os momentos transferidos para o pilar devem ser limitados ao momento resistente de uma secção rectangular igual a $0,17b_e d^2 f_{ck}$, onde b_e se determina como ilustrado na Figura 5.26.

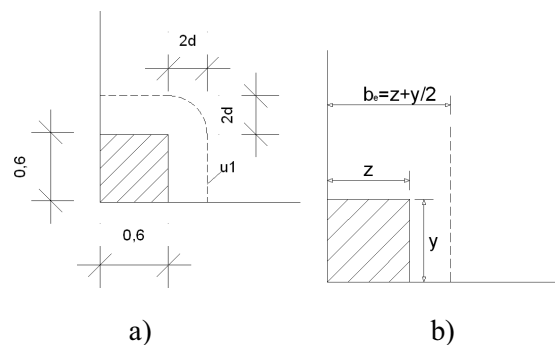


Fig. 5.26 – a) Secção de controlo u_1 ; b) Determinação de b_e

Assim, tendo sido feito o pré-dimensionamento a partir do controlo de deformação conhece-se d , e conhecido o b_e , calcula-se o momento máximo a que o pilar poderá estar sujeito – $0,17 \times 0,90 \times 0,17^2 \times 20 \times 10^3 = 90\text{kN.m}$. Assim, aquando da análise estrutural pode-se verificar se o pré-dimensionamento satisfaz esta condição.

Na Figura 5.27, apresentam-se as distribuições dos momentos flectores e torsores. Constata-se que o valor dos momentos flectores na zona do pilar são da ordem de grandeza do valor máximo que o pilar

poderia receber. Verifica-se também que apesar deste exemplo apresentar características especiais, os momentos torsores presentes na laje não condicionam de forma expressiva o dimensionamento da laje. Na zona do pilar é onde esses esforços se apresentam de forma mais influente, sendo também a zona onde os momentos flectores se apresentam em maior valor. Não obstante destas considerações, repare-se que esses máximos surgem em poucos nós dos elementos finitos e com um gradiente acentuado, pelo que adoptar o valor máximo poderá revelar-se excessivo. Assim sendo, deve-se analisar a zona subjacente e encontrar um valor que se enquadre numa perspectiva de valor máximo, em correspondência com um gradiente atenuado face à zona envolvente.

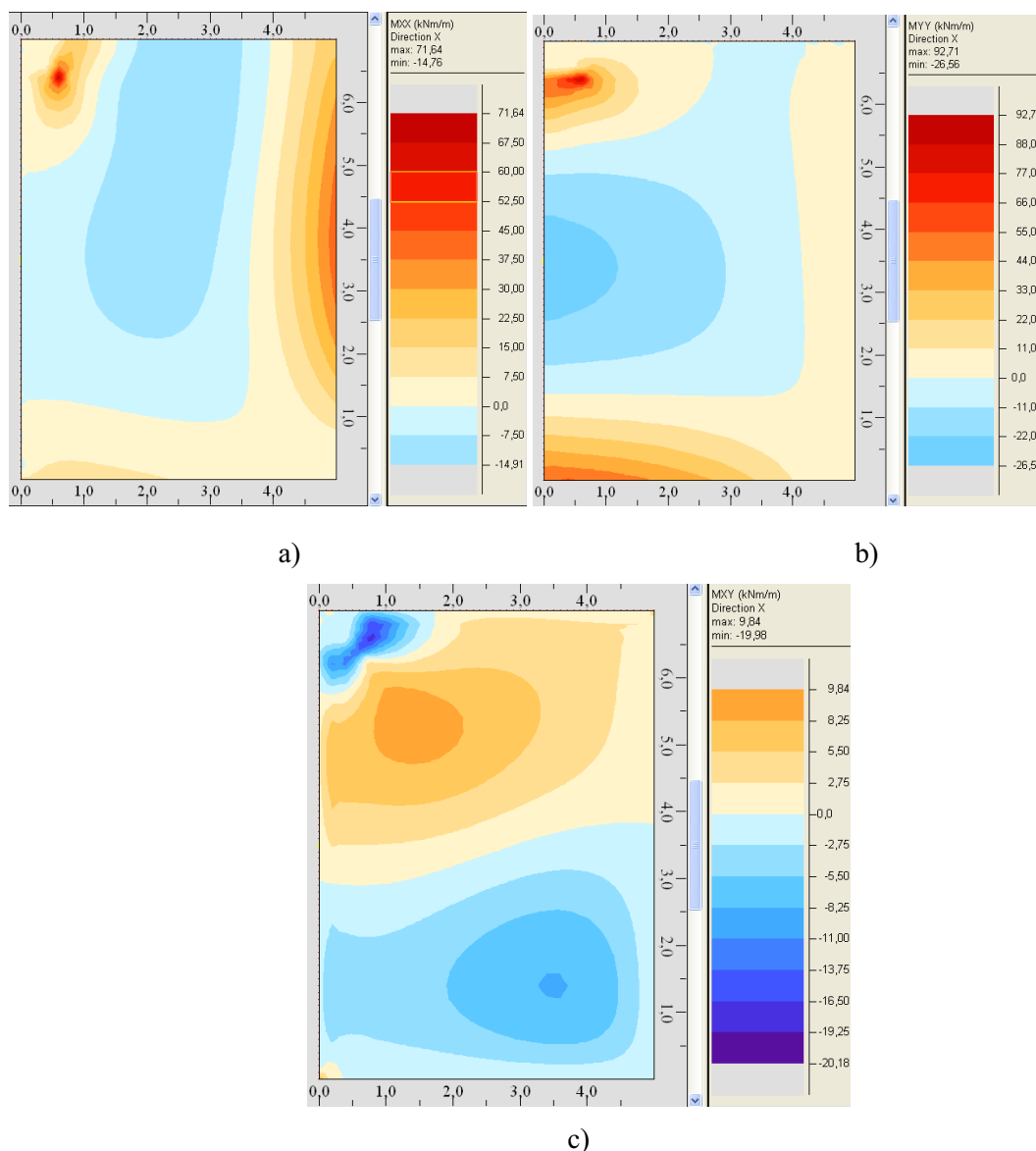


Fig. 5.27 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy}

Na Figura 5.28 apresenta-se os mapas com o dimensionamento e divisão das armaduras inferior e superior em faixas. Note-se que neste caso de aplicação, bem como nos restantes, essa divisão é sugerida pelo autor do presente trabalho.

No que respeita ao dimensionamento propriamente dito, este exemplo difere dos anteriores pelo facto de ter-se uma malha ortogonal de armadura na camada superior na zona do pilar de lado b_c . Repare-se que as zonas de maior exigência de armadura estão em correspondência com as zonas de maior solicitação por parte dos momentos flectores, sendo que os momentos torsores interferem em algumas zonas mas com pouca preponderância. Por isso, apesar de inicialmente se prever que os momentos torsores tivessem uma maior influência, dadas as características da laje, principalmente no que respeita às condições de apoio, verifica-se que este caso prático tem um comportamento estrutural comandado acima de tudo pelos momentos flectores.

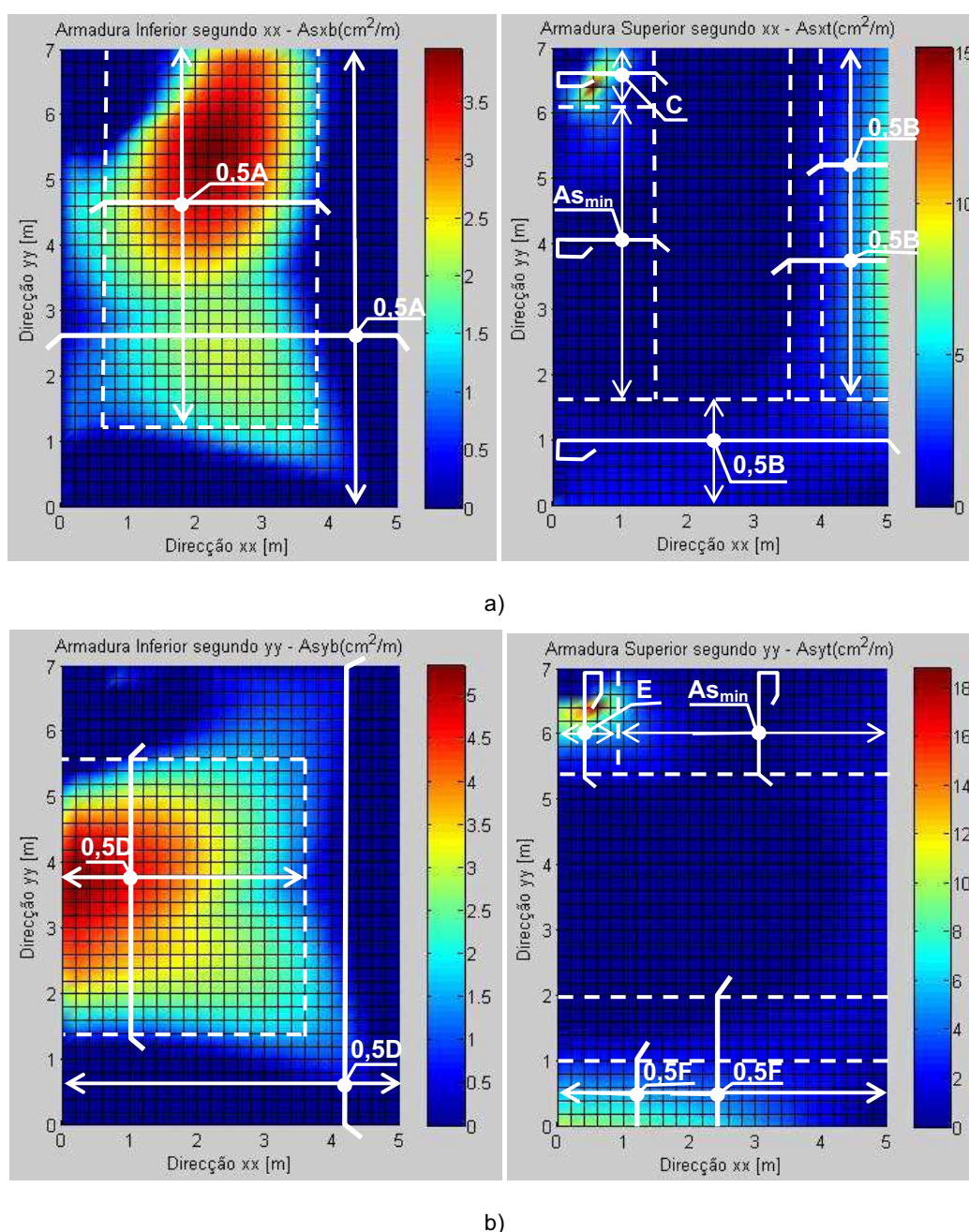


Fig. 5.28 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y

No que respeita às tensões instaladas no betão, apresentam-se na Figura 5.29 as distribuições das tensões no betão nas camadas superior e inferior. Mais uma vez, através das tensões verificadas no betão, deduz-se onde a estrutura é mais solicitada e, conseqüentemente, onde exigirá maiores quantidades de armadura. Como se observa pela Figura 5.29, essas zonas são junto ao pilar de bordo, junto aos bordos encastrados e também na zona central junto ao lado simplesmente apoiado de maior vão.

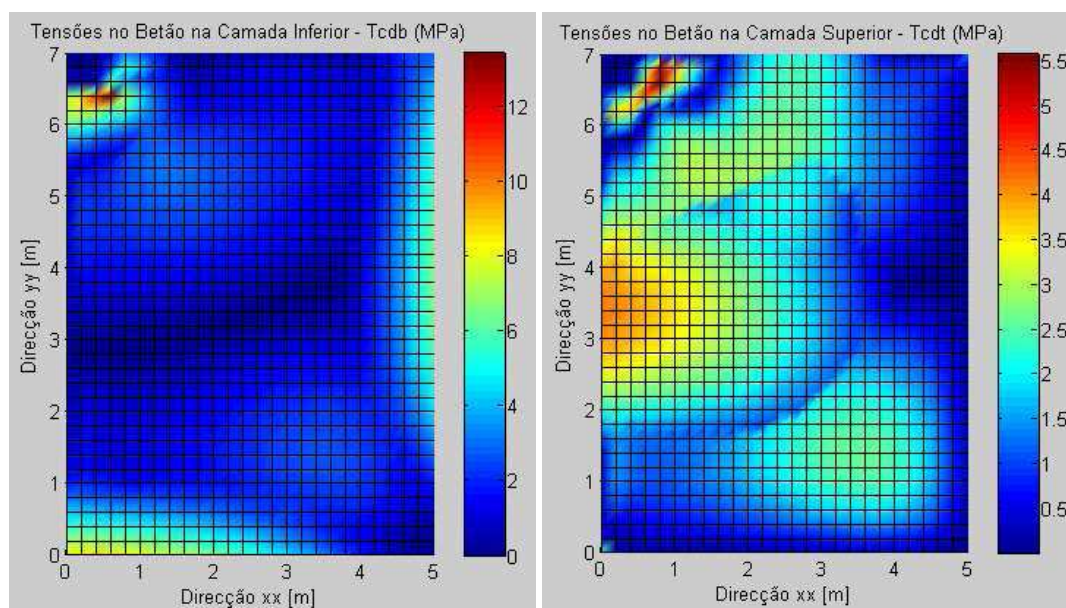


Fig. 5.29 – Tensões no betão

5.2.6. EXEMPLO 6 – LAJE ENCASTRADA EM 2 BORDOS E COM UMA ABERTURA

O presente exemplo enquadra-se numa perspectiva de demonstrar como a aplicação do programa desenvolvido poderá ser útil. Considerando-se deste modo um caso prático de um pavimento de um edifício destinado a comércio, constituído por lajes maciças de betão armado de espessura constante apoiadas em vigas, pretende-se dimensionar o painel assinalado na planta representada na Figura 5.30, que tem a particularidade de ter uma grande abertura, sujeito a uma acção de cálculo de 15kN/m^2 . Tendo em consideração a continuidade do painel em estudo com os painéis adjacentes, pode-se simplificarmente considerar-se para efeitos de análise, os bordos AB e AC como encastrados e os bordos CD e BD como simplesmente apoiados, como ilustrado na Figura 5.30.

Com este exemplo pretende-se também constatar de que forma a existência de grandes aberturas interfere na análise estrutural e, no âmbito do objectivo do presente trabalho, se implica a existência de momentos torsores, que predominem no comportamento estrutural, e conseqüentemente, no dimensionamento da armadura.

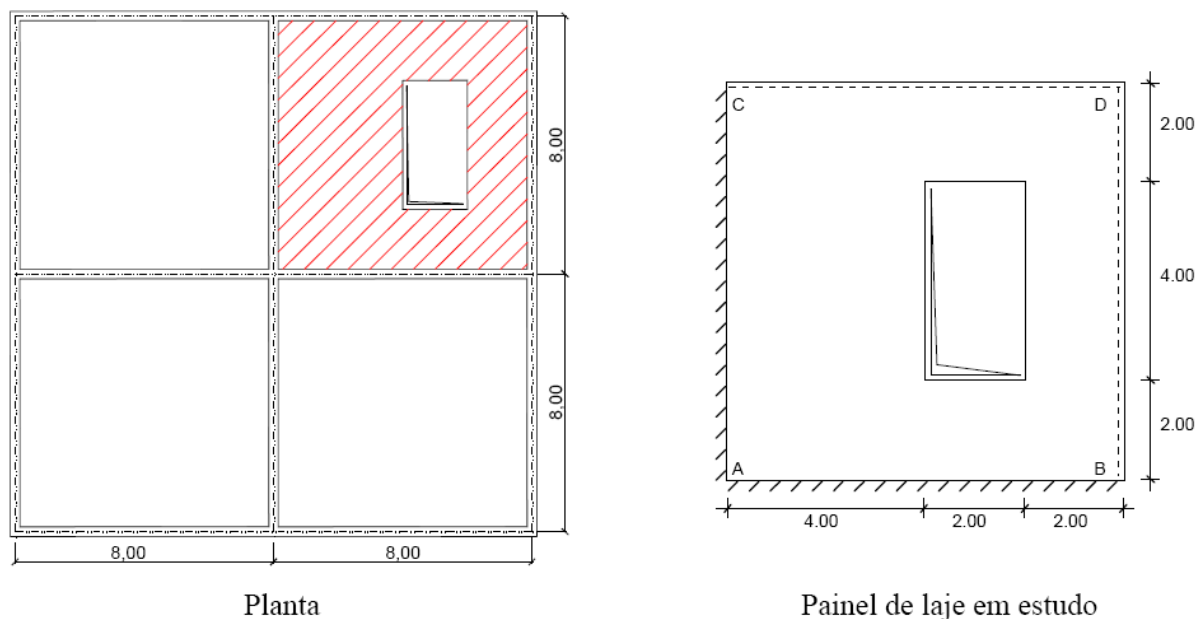


Fig. 5.30– Caso de estudo de uma laje de um pavimento de um edifício industrial

Neste caso, para um bom desempenho estrutural devem verificar-se as seguintes condições:

- Deformação: $\frac{l}{d} \leq k_{os} k_T k_i \lambda_0$
- Esforço Transverso: $V_{Rd,c} \geq V_{sd}$
- $\mu = 0,10 - 0,15$

Através do controlo da deformação pré-dimensiona-se a laje:

$$\Rightarrow \frac{l}{d} \leq k_{os} k_T k_i \lambda_0 \text{ com } \lambda_0 = 26 \text{ e admitindo } k_{os} = 1.4$$

$$\Leftrightarrow d \geq \frac{800}{26 \times 1,4} = 0,22 \Rightarrow \begin{cases} h = 0,25\text{m} \\ d = 0,22\text{m} \end{cases}$$

No que respeita ao esforço transverso, essa verificação também é efectuada pelo programa desenvolvido, sendo que, no entanto poderia-se efectuar uma rápida verificação considerando uma faixa de 1m de laje paralela a um dos lados simplesmente apoiados junto a esse mesmo bordo. Aquando da utilização do programa desenvolvido na determinação das armaduras na laje essa condição foi verificada.

Na Figura 5.31 apresentam-se os esforços presentes na laje, onde se pode constatar as zonas mais solicitadas da estrutura. Observa-se que os momentos torsores são significativos, principalmente no canto formado pelos bordos simplesmente apoiados, e junto aos cantos da abertura. Nestes também se concentram esforços dos momentos flectores, o que faz prever que seja uma zona a ter em atenção no dimensionamento. Nos bordos encastrados verificam-se, como seria de esperar, grandes esforços devidos aos momentos flectores.

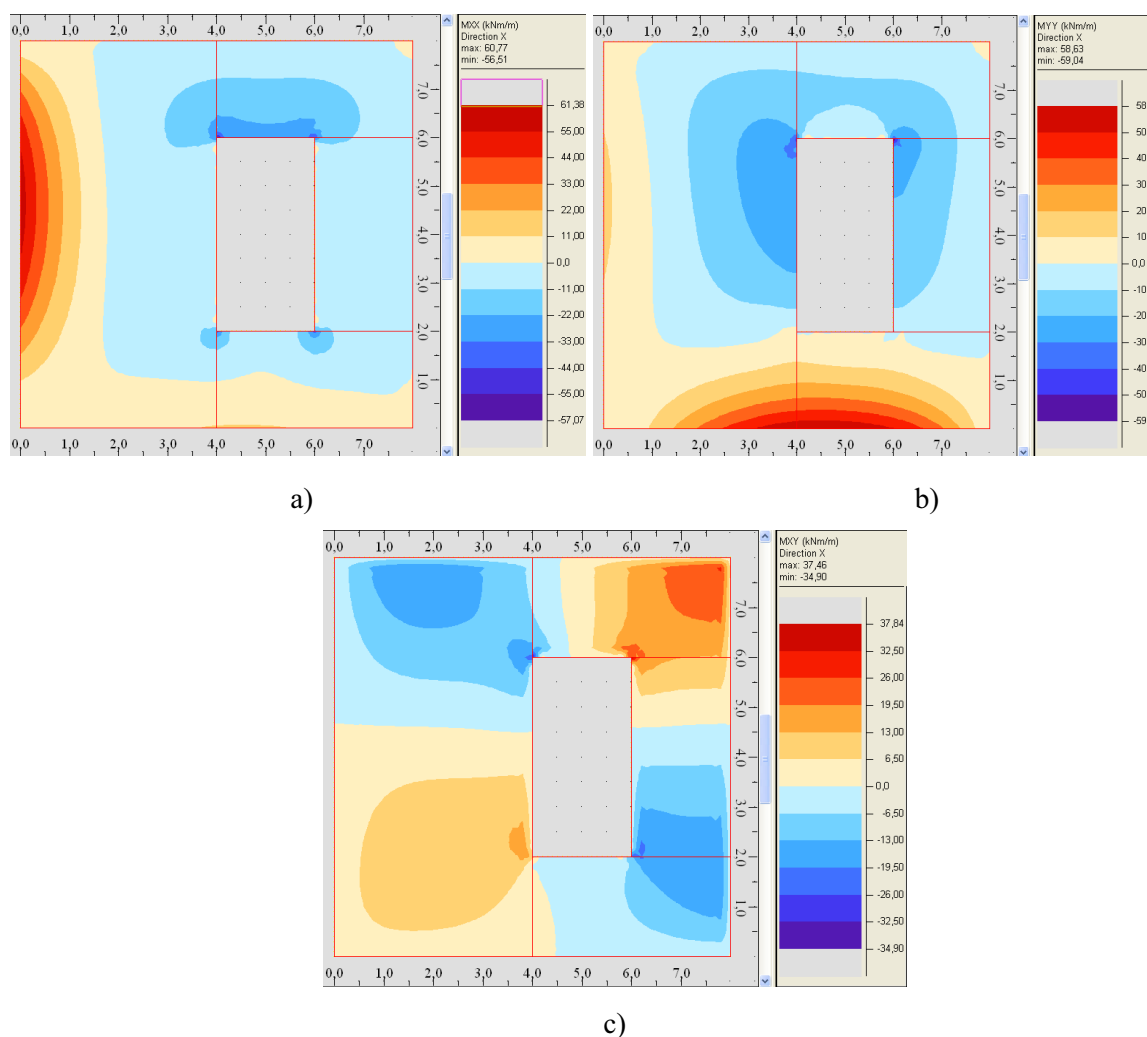


Fig. 5.31 – Momentos na laje; a) Mxx; b) Myy; c) Mxy

Em correspondência com as considerações anteriormente descritas, apresentam-se na Figura 5.32 os mapas de exigência de armaduras e correspondentes faixas e dispensas. Tomando em linha de conta a influência dos momentos torsores no dimensionamento, verifica-se a necessidade de armaduras no canto formado pelos bordos simplesmente apoiados, para o que se sugere uma malha ortogonal de armaduras de 2m de lado em ambas as camadas, superior e inferior, de cerca de 75% do valor máximo verificado na camada e direcção correspondentes. Este valor vai de encontro à exigência de armadura constatada nos mapas de armaduras da Figura 5.32 e ao valor sugerido por Montoya (2000). Quanto à necessidade de armadura nos cantos da abertura, originada tanto pelos momentos torsores como pelos momentos flectores, sugere-se a aplicação do valor máximo verificado da armadura na respectiva camada e direcção numa faixa de 1m. Quanto a esta armadura, chama-se a atenção para o facto de o valor máximo ser cerca de $12,5 \text{ cm}^2 / \text{m}$, valor este que se verifica apenas num nó de um elemento finito. Portanto, também neste exemplo, a aplicação do valor máximo deve ser ponderada e ajustada se se verificar adequado. Para o caso em estudo, sugere-se que essa faixa de 1m seja materializada por armaduras no valor de cerca de $10 \text{ cm}^2 / \text{m}$. Deste modo, sugere-se também que os valores de 0,75A e de 0,5A, correspondentes à dispensa de armaduras, sejam calculados tendo já em conta o valor de $A=10 \text{ cm}^2 / \text{m}$. No que toca ao dimensionamento dos bordos encastrados, verifica-se um

dimensionamento devido aos momentos flectores, não se procedendo a nenhuma dispensa pelo facto de as mesmas armaduras desempenharem a função de armaduras de bordo livre devido à abertura.

No que toca a este exemplo prático há a reter a influência dos momentos torsores no dimensionamento de algumas zonas da estrutura, como já anteriormente referenciado e, também a especial atenção ao dimensionamento das faixas junto as bordos livres da abertura.

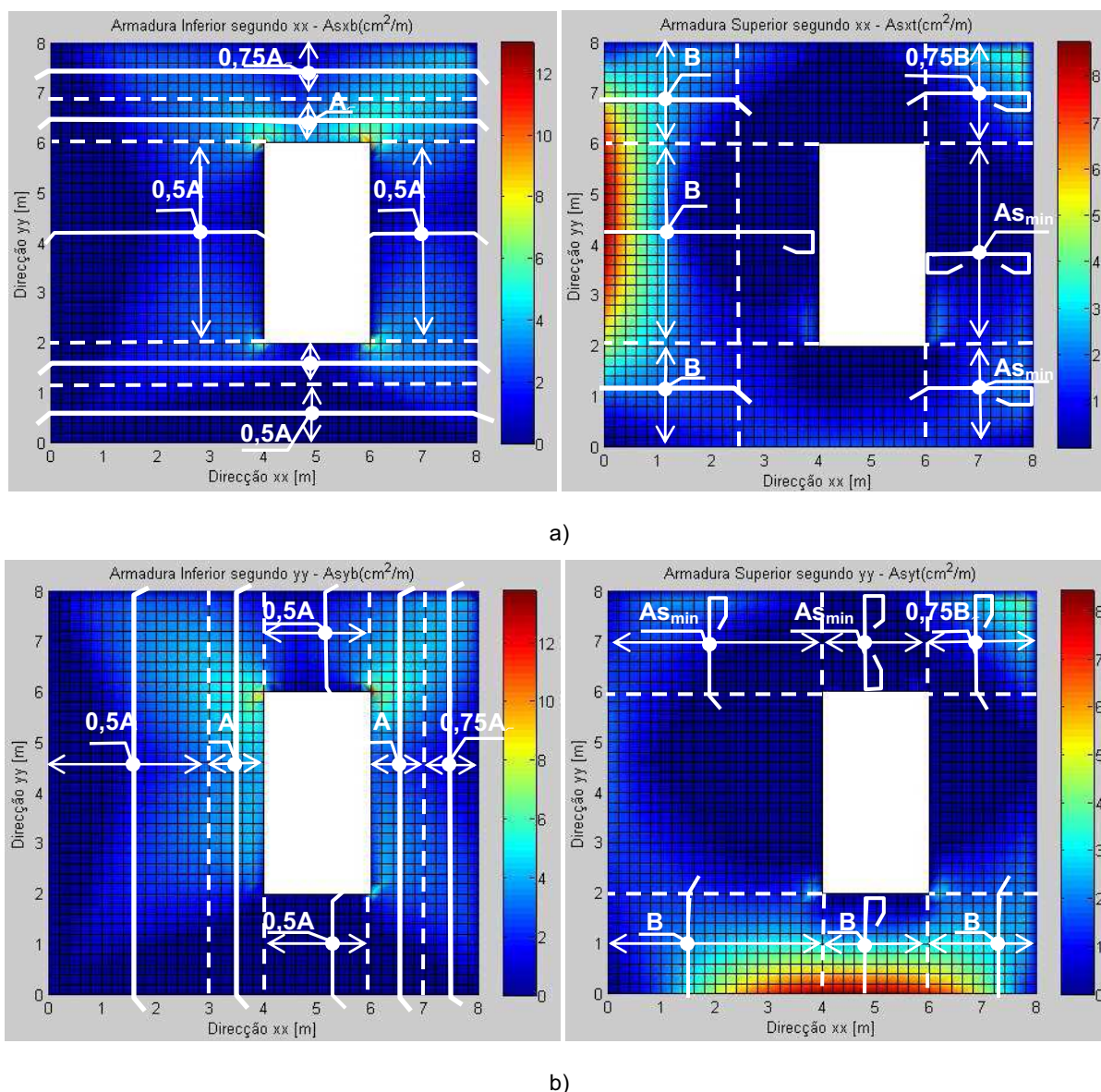


Fig. 5.32 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y

Em sintonia com as apreciações efectuadas, apresenta-se na Figura 5.33, as distribuições das tensões instaladas nas camadas superior e inferior de betão. Repare-se que para esta laje, o limite de tensões no betão foi estipulado pelo f_{cd2} , como se observa nas distribuições das tensões no betão na camada inferior. Isto revela que a laje está sujeita a esforços mais desfavoráveis em toda a estrutura, verificando que as escoras comprimidas de betão estarão sujeitas a tracções transversais, pelo que o EC2 recomenda uma redução da resistência das escoras de betão estabelecendo o limite das tensões no

betão a $f_{cd2} = 0,6v'f_{cd}$, que no caso do betão C20/25 toma o valor de $f_{cd2} = 7,34$ MPa, valor este que se observa como máximo no mapa de tensões instaladas no betão na camada inferior.

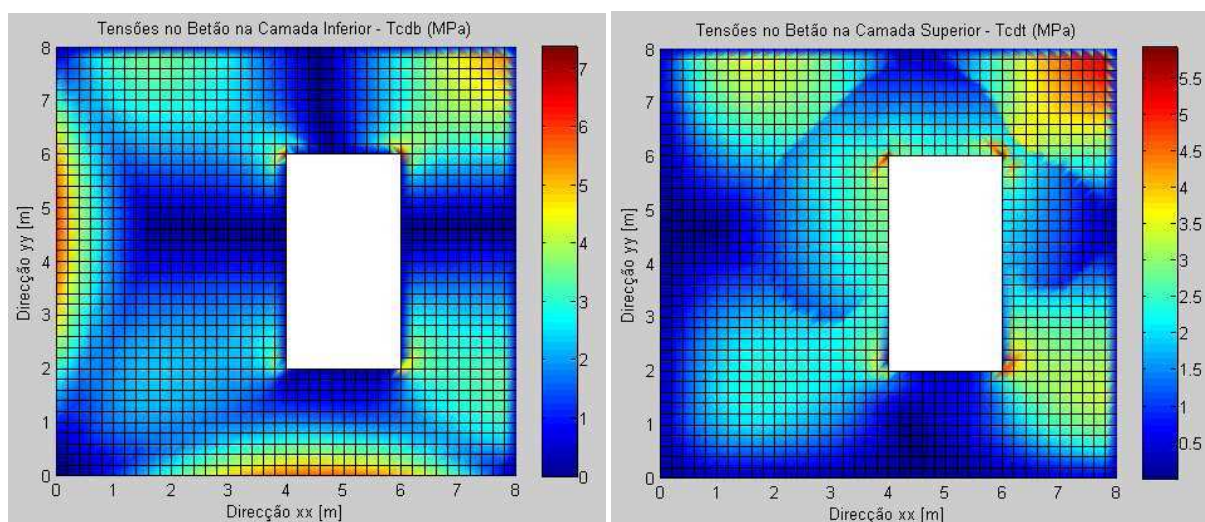


Fig. 5.33 – Tensões no betão

5.2.7. EXEMPLO 7 – LAJE APOIADA EM 2 PILARES

O caso de estudo apresentado na Figura 5.34 revela-se de grande interesse, dado tratar-se de um exemplo em que se observa que os momentos torsores interferem de forma muito marcada no dimensionamento. Considerou-se então uma laje maciça apoiada em dois pilares, sujeita a uma acção uniformemente distribuída de cálculo $7,5 \text{ kN/m}^2$ e a duas forças concentradas de cálculo de 135 kN , estas últimas aplicadas nas extremidades da diagonal perpendicular à diagonal que passa pelos 2 pilares. A utilização destas cargas foi considerada com o objectivo de se ter uma carga de cálculo equivalente a 15 kN/m^2 em toda a laje, sendo que metade seria aplicada como carga uniformemente distribuída traduzindo o peso próprio, e a outra metade materializou-se em duas forças pontuais de forma a retratar as acções transmitidas por 2 pilares apoiados na face superior da laje.

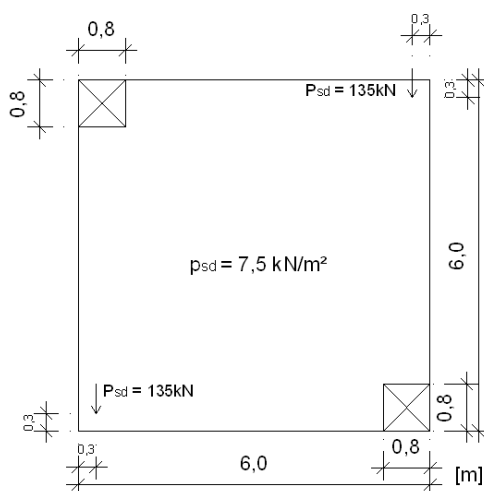


Fig. 5.34 – Laje apoiada em dois pilares sujeita a cargas uniformemente distribuídas e pontuais

Tratando-se duma laje maciça apoiada em dois pilares, têm de ser verificadas as seguintes condições:

- Deformação: $\frac{1}{d} \leq k_{\sigma s} k_T k_l \lambda_0$
- Punçoamento: $v_{Ed} < v_{Rd,c}$
- $\mu = 0,10 - 0,15$

Através do controlo da deformação pré-dimensiona-se a laje:

$$\Rightarrow \frac{1}{d} \leq k_{\sigma s} k_T k_l \lambda_0 \text{ com } \begin{cases} \lambda_0 = 17 \rightarrow \rho = 1,5\% \\ \lambda_0 = 24 \rightarrow \rho = 0,5\% \end{cases} \text{ e admitindo } k_{\sigma s} = 1.4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d \geq \frac{600}{24} = 0,25 \\ d \geq \frac{600}{17} = 0,35 \end{cases} \Rightarrow \text{seja } \begin{cases} d = 0,27\text{m} \\ h = 0,30\text{m} \end{cases}$$

Segundo o EC2, há a possibilidade de controlar a deformação para um betão fortemente solicitado, $\rho = 1,5\%$, ou para um betão levemente solicitado, $\rho = 0,5\%$. Para o presente exemplo estudou-se para ambas as alternativas e decidiu-se optar por um valor intermédio no que toca ao valor de d e h , como se observa no pré-dimensionamento acima efectuado. De seguida, passa-se à verificação no que toca ao punçoamento, para o qual se deve efectuar as mesmas verificações que se realizaram para o Exemplo 5. Assim tem-se que para:

- para u_0

$$\begin{cases} u_0 = 0,8 + 0,8 = 1,60\text{m} \\ v_{Ed} = \frac{\beta \times V_{Ed}}{u_1 \times d} = \frac{1,5 \times 272,5}{1,60 \times 0,27} = 0,946\text{MPa} \\ v_{Rd,max} = 0,5 \cdot v_{fcd} = 0,5 \times 0,6 \times \left(1 - \frac{20}{250}\right) \times 13,3 = 3,67\text{MPa} > v_{Ed} = 0,946\text{MPa} \Rightarrow \text{O.K.} \end{cases}$$

- para u_1

$$\begin{cases} u_1 = 0,8 + 0,8 + \pi d = 2,45\text{m} \\ v_{Ed} = \frac{\beta \times V_{Ed}}{u_1 \times d} = \frac{1,5 \times 272,5}{2,45 \times 0,27} = 0,618\text{MPa} \\ v_{Rd,c} = C_{Rd,c} \cdot K \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} = 0,12 \times 2 \times (100 \times 0,003 \times 20)^{1/3} = 0,436\text{MPa} \\ v_{min} = 0,035 \cdot K^{2/3} \cdot f_{ck}^{1/2} = 0,035 \times 2 \times \sqrt{20} = 0,442\text{MPa} \\ v_{Rd,c} = v_{min} = 0,442\text{MPa} < v_{Ed} = 0,618\text{MPa} \Rightarrow \text{K.O.} \Rightarrow \text{Dimensionar Armadura Punçoamento} \end{cases}$$

No que respeita ao punçoamento, para o perímetro de controlo u_1 , constata-se que v_{Ed} é superior a $v_{Rd,c}$, o que significa que terão de se dimensionar armaduras de punçoamento. Não sendo objectivo do presente trabalho o dimensionamento ao punçoamento, e tendo o pilar dimensões significativas, considera-se estarem reunidas as condições para prosseguir com o caso de aplicação, ressaltando o facto de que seria necessário dimensionar armaduras para verificar a condição de punçoamento.

Uma vez que também neste exemplo se está perante um pilar de bordo ou de canto, os momentos transferidos para o pilar devem ser limitados ao momento resistente de uma secção rectangular igual a $0,17b_e d^2 f_{ck}$, onde b_e se determina como anteriormente ilustrado na Figura 5.26.

Assim, tendo sido feito o pré-dimensionamento a partir do controlo de deformação conhece-se d , e conhecido o b_e , calcula-se o momento máximo a que o pilar poderá resistir. Assim o valor é $0,17 \times 1,20 \times 0,27^2 \times 20 \times 10^3 = 300 \text{ kN.m}$.

Na Figura 5.35 apresentam-se as distribuições de momentos referentes à análise estrutural do caso em estudo, a partir das quais podem-se tecer considerações pertinentes, de modo a compreender o comportamento estrutural da estrutura em causa, o qual condicionará obviamente o respectivo dimensionamento. Assim, neste exemplo é particularmente relevante a distribuição dos momentos torsores, que embora sejam inferiores aos momentos flectores em termos de valor, de acordo com a Figura 5.35 c) têm relevância face a estes últimos. De facto os momentos flectores são condicionantes na zona circundante aos pilares, perdendo preponderância na restante parte da laje, onde por sua vez os momentos torsores condicionam claramente o comportamento estrutural. Aliás, tendo em linha de conta o facto de que as acções predominantes são as cargas pontuais, compreende-se que o caso em estudo é similar ao caso de torção pura. A comprovar a importância e a predominância no comportamento estrutural dos momentos torsores, apresenta-se o mapa da Figura 5.35 d), no qual se podem visualizar as trajectórias e os valores dos momentos principais. Nesse gráfico, os momentos principais negativos estão representados na cor amarelo e os momentos principais positivos a cor azul. Note-se a semelhança entre este e o mapa da Figura 5.35 c), no qual se representam os momentos torsores, comprovando a influência destes momentos no comportamento estrutural. Ainda sobre este assunto, revela-se pertinente observar o facto de os ângulos que as trajectórias dos momentos principais fazem com os bordos da laje serem aproximadamente 45° , o que tendo em linha de conta o círculo de Mohr facilmente se compreende, estando perante um caso de grande incidência da torção. No que respeita aos momentos flectores, salienta-se o facto de que os valores máximos são observados em poucos nós dos elementos finitos, pelo que é necessário dimensionar ponderadamente essas zonas, não devendo portanto adoptar-se o valor máximo pontual apresentado pela análise do Robot Millennium, sugerindo-se que se encontre um valor razoável tendo em atenção o gradiente de momentos flectores na zona subjacente.

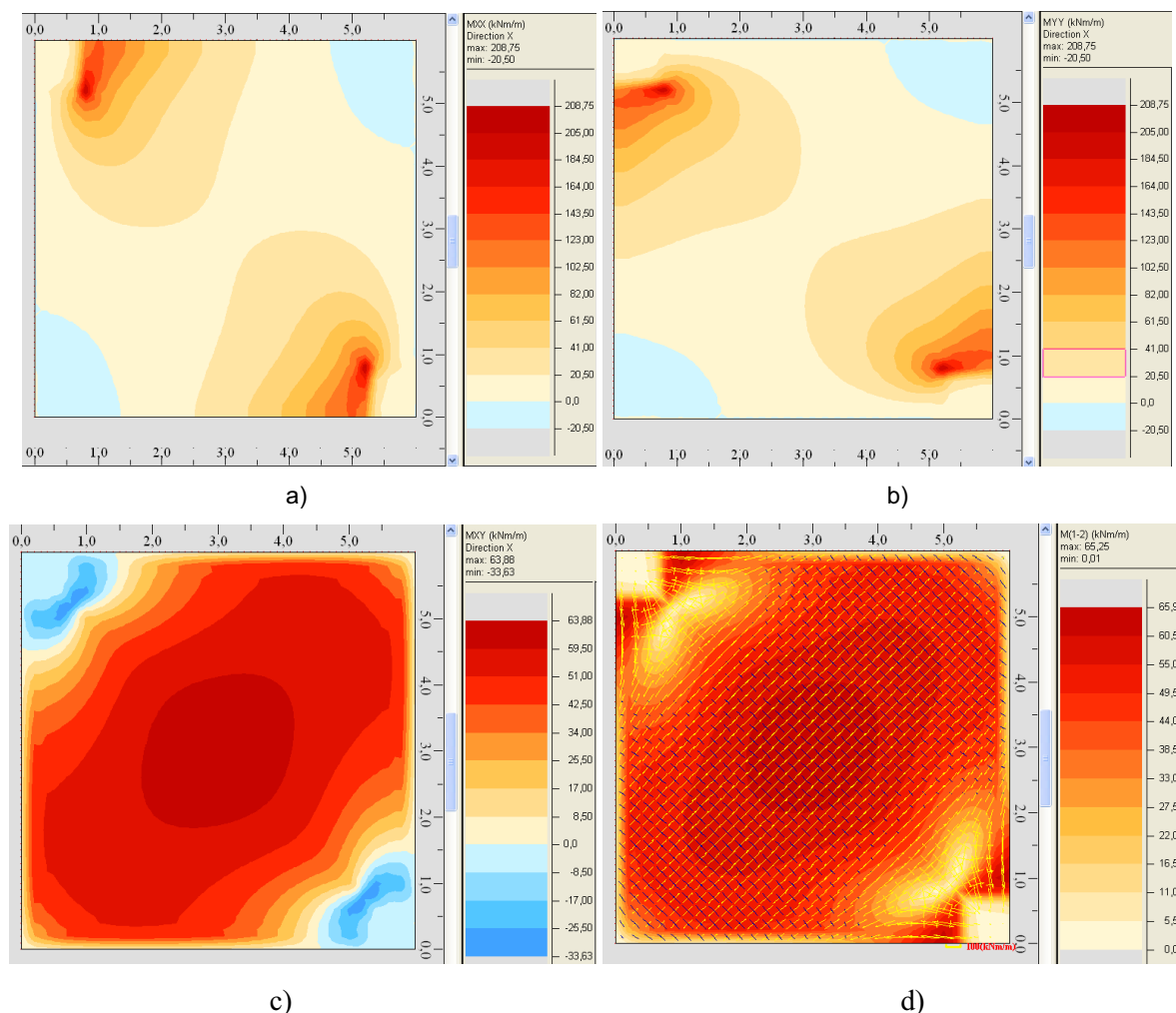


Fig. 5.35 – Momentos na laje; a) M_{xx} ; b) M_{yy} ; c) M_{xy} d) Momentos principais

Na Figura 5.36 apresentam-se os mapas referentes ao dimensionamento de armaduras para o caso em estudo. Note-se que dada a simetria da estrutura e do carregamento resulta que o dimensionamento é igual quer para a direcção segundo x quer segundo y . Observa-se pela análise dos mapas das armaduras inferiores uma completa sintonia com o gráfico dos momentos torsores, os quais juntamente com os momentos flectores determinam as armaduras superiores a colocar na zona dos pilares e na zona central.

Analisando o gráfico d) da Figura 5.35, e observando concretamente as trajetórias dos momentos principais, constata-se duas diagonais que fazem entre si 90° . Isto significa que caso se pretendesse dimensionar tendo em vista os momentos principais, poder-se-ia orientar a armadura segundo essas diagonais. Sendo assim, e tendo em linha de conta os momentos principais negativos (a cor amarela) verifica-se que será a faixa ortogonal à diagonal que passa pelos 2 pilares a mais solicitada. Ora pelos mapas de armaduras superiores observa-se que é exactamente essa faixa sujeita a um maior dimensionamento de armaduras. O mesmo se aplica para a camada inferior, apresentando a faixa mais solicitada perpendicularmente à homóloga da camada superior, comprovando-se pelos mapas de armaduras inferiores.

Quanto ao dimensionamento propriamente dito, no que toca às armaduras inferiores sugere-se uma malha ortogonal em toda a laje de cerca de metade do valor máximo obtido nos mapas de armaduras inferiores ilustrados na Figura 5.36, ou seja, cerca de $3,5 \text{ cm}^2 / \text{m}$, complementada pela outra metade numa malha também ortogonal de armaduras de 4 m de lado na zona dos cantos. Quanto às armaduras superiores, sugere-se também a colocação de uma malha ortogonal de armaduras em toda a laje com cerca de $10 \text{ cm}^2 / \text{m}$, complementada por uma malha ortogonal de armaduras na zona dos pilares com cerca de $10 \text{ cm}^2 / \text{m}$, perfazendo nesta zona um total de $20 \text{ cm}^2 / \text{m}$. Repare-se que para a zona dos pilares o resultado obtido aponta para cerca de $25\text{-}30 \text{ cm}^2 / \text{m}$, valor esse que se verifica apenas num nó, o que à imagem de outros exemplos anteriormente citados, revela-se desajustado.

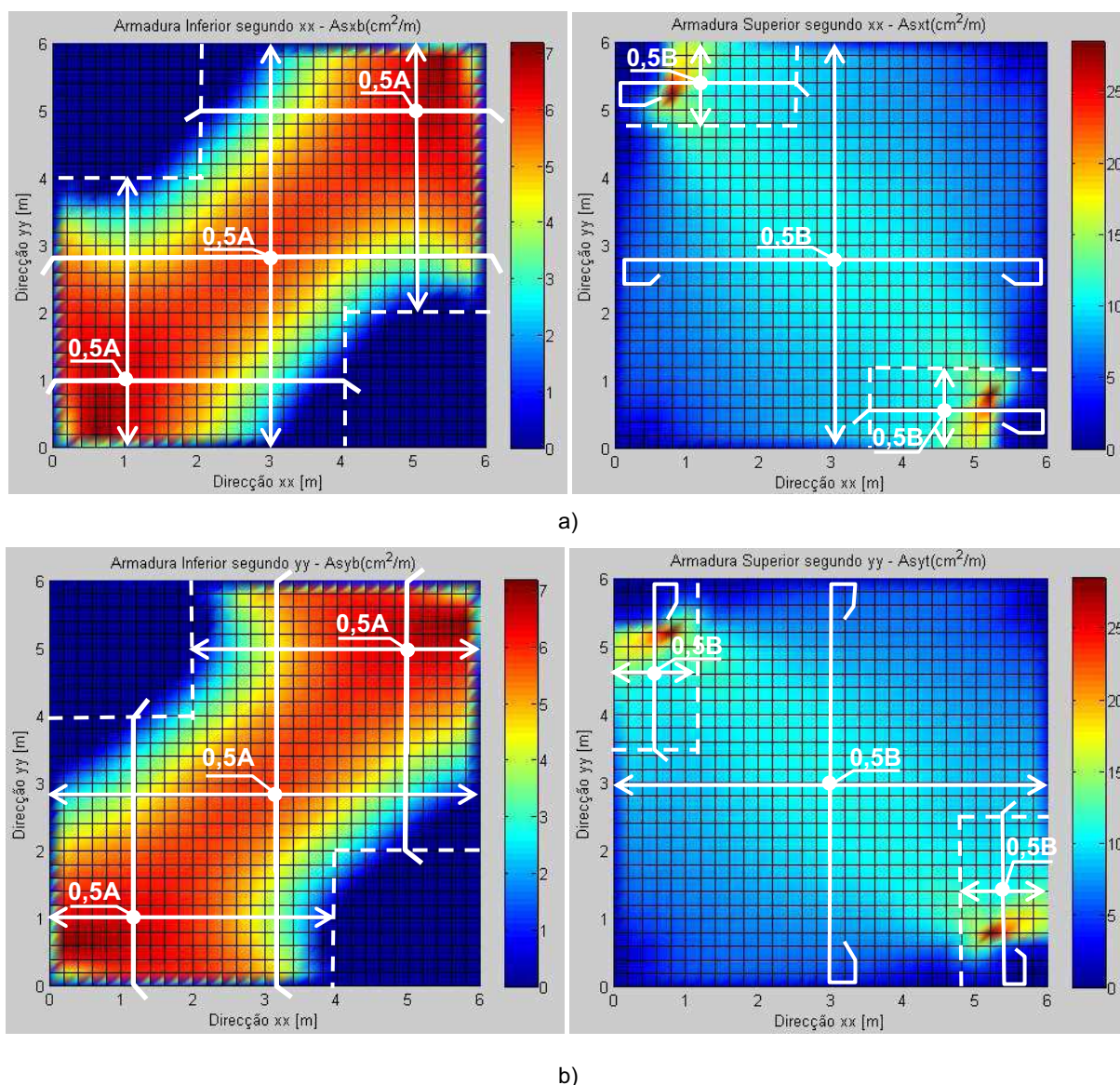


Fig. 5.36 – a) Armaduras segundo a direcção x; b) Armaduras segundo a direcção y

De forma a constatar a importância dos momentos torsores e o modo como influenciam o comportamento estrutural no presente caso de estudo, apresenta-se a Figura 5.37 com as distribuições referentes às tensões verificadas no betão. Deste modo, pode-se observar a correlação existente entre estes mapas e o mapa c) da Figura 5.35, evidenciando que são os momentos torsores que condicionam, como seria de esperar, as distribuições das tensões no betão.

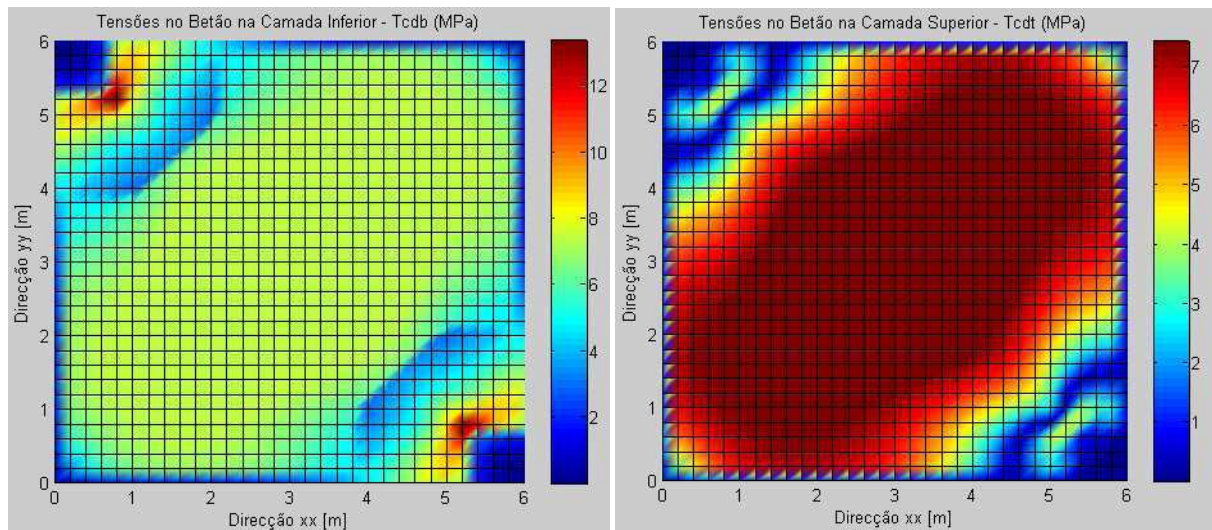


Fig. 5.37 – Tensões no betão

5.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente capítulo procurou demonstrar a aplicabilidade do programa desenvolvido DesignSlab, através da análise de exemplos práticos de lajes com características especiais e, também, com exemplos que embora não apresentassem singularidades, foram pertinentes, dado que foi possível comparar resultados obtidos pelas tabelas de cálculo numa perspectiva de concluir se os resultados obtidos pelo programa DesignSlab seriam coerentes tanto ao nível dos valores como ao nível das regras de dispensa de armadura.

Assim sendo e, começando pelos exemplos em que se pretendeu comparar os valores obtidos por Montoya e pelo Norma Britânica BS 8110 e pelo programa DesignSlab, verificou-se que ambos os resultados obtidos pelos métodos anteriormente citados são coerentes com os resultados obtidos pelo programa desenvolvido, ou seja, os valores obtidos para o dimensionamento das lajes e as respectivas regras de dispensa são verificadas quase de forma escrupulosa pela ferramenta em estudo. No entanto, foi possível verificar alguns aspectos relacionados com a dispensa de armaduras que o autor do presente trabalho acha pertinente realçar. A passagem da totalidade de armaduras para a metade nas faixas centrais, segundo o Método de Montoya, efectua-se em função do menor vão, o que no Exemplo 3 veio a verificar-se que essa passagem é um pouco prematura. Por sua vez, segundo a Norma Britânica, essa passagem é efectuada em função do vão na direcção que se pretende

dimensionar, revelando-se mais ajustada. No que toca às faixas laterais, segundo a Norma Britânica verificou-se que, sendo compostas por uma armadura mínima, seria um valor baixo, como se observou para o mesmo Exemplo 3, ao passo que Montoya sugere metade da armadura, verificando desta forma mais apropriado. No entanto, não obstante destas considerações, realça-se o facto de que estas pequenas incongruências não comprometem o bom comportamento estrutural das lajes. Essas pequenas nuances serão um pouco mais significativas na presença de grandes valores de armadura, o que para as lajes correntes não apresentam nenhum problema.

Nos restantes exemplos, procurou-se estudar lajes em que, devido a singularidades existentes se verificasse a existência de momentos torsões importantes, ao ponto de condicionar o comportamento estrutural e, consequentemente o dimensionamento, podendo dessa forma verificar a utilidade da ferramenta desenvolvida, uma vez que nesses casos não é possível a utilização de tabelas de cálculo. Assim, verificou-se pelos três casos de estudo que o dimensionamento através do programa DesignSlab se revela de grande utilidade para lajes maciças.

6

CONCLUSÕES

6.1. CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho efectuou-se uma abordagem ao dimensionamento de lajes não contempladas em tabelas de cálculo correntes, as quais fornecem regras práticas de dimensionamento e de disposição das armaduras. Estas regras só são adequadas para lajes que respeitem determinadas condições de apoio e de carregamento, não abrangendo casos de lajes com singularidades como grandes aberturas, apoios pontuais em pilares ou bordos livres. Nestes casos a análise com base em programas que utilizam o MEF conduz, num referencial Oxy implantado no folheto médio da lajes, a momentos flectores M_x , M_y e a momento torsor M_{xy} que variam de ponto para ponto, podendo os momentos flectores e torsores ocorrerem com valores muito elevados nas mesmas regiões das lajes, sendo então necessário um procedimento especial para dimensionar as armaduras necessárias. No Anexo F da versão de 2004 do EC2, bem como no Anexo A2 da versão de 1991 do EC2, é referido este procedimento, de grande utilidade para o projecto corrente.

Assim, neste trabalho explorou-se a utilização deste procedimento no dimensionamento de lajes não contempladas por tabelas de cálculo correntes, que culminou na respectiva implementação num algoritmo (o DesignSlab) que recebe como dados os momentos M_x , M_y e M_{xy} obtidos na análise pelo MEF, efectuando a determinação das armaduras necessárias e a verificação das tensões nas bielas comprimidas de betão.

Nesta dissertação começou-se por expor a metodologia desenvolvida por Gupta (1986), no que diz respeito ao dimensionamento de lajes com momentos flectores e torsores, tendo sido obtidas as expressões correspondentes ao Método Geral Recorrendo às Equações de Equilíbrio. Constatou-se que essas expressões, mediante simplificações, dão origem às homólogas preconizadas para o dimensionamento de lajes no Anexo F do EC2 (versão de 2004), bem como as que são apresentadas no Modelo Código MC90. Neste domínio, e segundo Gupta (1986), verificou-se a existência de momentos adicionais em elementos sujeitos unicamente a esforços de flexão e torção, como é o caso de estudo do presente trabalho. Num simples exemplo verificou-se que esses momentos adicionais, consequência da localização das resultantes de armadura e do bloco de tensões nas bielas de betão para a mesma camada, superior ou inferior, estarem a níveis diferentes, sendo negligenciados poderão levar ao subdimensionamento da armadura.

Constatou-se que as expressões f'_{tdx} e f'_{tdy} preconizadas no Anexo F da versão de 2004 do EC2 são tensões fictícias que existem nas áreas traccionadas, ou seja, nas camadas superior ou inferior, sendo portanto definidas pela percentagem de armadura multiplicada pela tensão de cálculo de cedência da armadura. Assim, consequentemente, as expressões que permitem determinar o valor das armaduras A_{sx} e A_{sy} vêm afectadas da correspondente camada traccionada h .

Quanto ao código DesignSlab desenvolvido no presente trabalho para implementação da metodologia do Anexo F do EC2, demonstrou-se que permite não só determinar as armaduras e as tensões nas bielas de compressão de lajes (a partir dos esforços obtidos através de uma análise linear pelo MEF), como possibilita ainda a visualização destes resultados. A utilização do programa DesignSlab baseia-se na utilização encadeada de três programas: o Robot Millennium, o Excel e o Matlab. Quanto ao primeiro, realiza a análise das lajes pelo MEF, permitindo a exportação das tabelas com os esforços actuantes. Quanto ao Excel, destina-se basicamente a proceder à regravação das tabelas exportadas do Robot Millennium num formato adequado à utilização pelo Matlab, ferramenta no contexto da qual foi desenvolvido o DesignSlab propriamente dito.

No decurso do desenvolvimento do DesignSlab este foi validado com os resultados de cinco exemplos analisados com a metodologia de Gupta (1986), bem como com os resultados de dois exemplos estudados por Lourenço (1992). Quanto aos cinco primeiros exemplos, verificou-se que os resultados obtidos pelo DesignSlab são praticamente iguais aos de Gupta (1986), apesar do braço z adoptado no programa desenvolvido ser único, enquanto que na metodologia de Gupta (1986) existem dois valores de z (um para o cálculo das tensões normais e outro para o cálculo das tensões de corte).

No que respeita aos dois exemplos finais, no primeiro constataram-se algumas discrepâncias nos diagramas das armaduras superior e inferior segundo a direcção y , correspondentes a cortes da laje paralelos ao eixo x próximo do bordo e no meio vão. Estes desvios deveram-se às variações bruscas verificadas no diagrama da armadura superior junto aos apoios, que se provou estarem directamente relacionadas com variações nas distribuições dos momentos torsores, as quais são consequência dos resultados obtidos no MEF serem avaliados nos nós e não nos pontos de Gauss. No que toca ao diagrama da armadura inferior, e ainda no que respeita ao primeiro desta segunda série de exemplos, verificou-se que os resultados obtidos pelo DesignSlab são muito parecidos com os homólogos obtidos por Lourenço (1992). No segundo exemplo constatou-se uma plena sintonia entre os resultados obtidos pelo programa DesignSlab e os reportados por Lourenço (1992), não se verificando para este caso as variações ocorridas no primeiro exemplo, dado que o gráfico dos momentos torsores não apresenta grandes variações.

Uma vez validado, e de forma a demonstrar a aplicabilidade do DesignSlab, realizaram-se várias aplicações com este programa. Nos exemplos de lajes com dimensionamentos de armaduras pelos métodos do Montoya e da Norma Britânica BS 8110, constatou-se que tanto os valores das armaduras como as regras de dispensa destas estão, em geral, em consonância com as indicações fornecidas pelo DesignSlab. No entanto, nas faixas centrais, e segundo o método do Montoya, a passagem da totalidade da armadura para metade efectua-se em função do menor vão, o que se veio a verificar ser em determinados casos prematuro. Por sua vez, segundo a Norma Britânica BS 8110 essa passagem é um função do vão na direcção que se pretende dimensionar, revelando-se esta indicação mais ajustada,

por comparação com as previsões do DesignSlab. No que toca às faixas laterais, a Norma Britânica BS 8110 sugere a adopção da armadura mínima, o que se verificou ser insuficiente em determinados casos. Neste aspecto o método do Montoya, que sugere a adopção nessas faixas de metade da armadura máxima do vão, verificou-se ser mais apropriado.

Quanto às restantes aplicações foi possível demonstrar a aplicabilidade do programa DesignSlab, tendo-se estudado lajes com singularidades não contempladas nas usuais tabelas de cálculo, e que ocasionalmente aparecem na construção corrente. Assim verificou-se que essas singularidades podem levar ao aparecimento de momentos torsores importantes, ao ponto de condicionarem o comportamento estrutural, e consequentemente, o dimensionamento de armaduras. Assim, a ferramenta desenvolvida no presente trabalho reveste-se de grande utilidade, dada a facilidade do seu uso, possibilitando o dimensionamento e a distribuição de armaduras.

No que toca à disposição das armaduras preconizadas neste trabalho, realça-se o facto de terem sido efectuadas segundo o ponto de vista do autor. No que toca a este assunto, é oportuno salientar que a distribuição das armaduras deve ser feita ponderadamente, pois resulta de uma análise linear elástica, a qual não interpreta correctamente a resposta estrutural dos materiais próximo da rotura. Todavia, a hipótese do comportamento linear elástico para o dimensionamento tem sido aceite, dadas as dificuldades de aplicação de análises não-lineares. Salienta-se ainda o facto de as lajes serem estruturas com uma grande capacidade de redistribuição de esforços, pelo que os resultados devem ser avaliados com base numa interpretação crítica por parte do projectista, tal como exemplificado em alguns casos de estudo do presente trabalho.

6.2. SUGESTÕES PARA FUTURO DESENVOLVIMENTO

Na sequência do estudo efectuado no presente trabalho verifica-se que ainda é uma área de trabalho a aprofundar, sendo destacadas nos parágrafos seguintes algumas das questões mais importantes a abordar em desenvolvimentos futuros.

No que respeita à determinação de armaduras, salienta-se o facto de que o programa DesignSlab determinar as distribuições de armaduras segundo os eixos ortogonais cartesianos x e y . Assim, seria uma área de trabalho a aprofundar a possibilidade de o dimensionamento das lajes envolver alinhamentos de armaduras não necessariamente coincidentes com aqueles eixos. Este desenvolvimento seria da maior importância pelo facto de ser prática corrente o recurso a lajes com viés, situação típica em tabuleiros de pontes. Sugere-se a reformulação das equações de equilíbrio em função de um ângulo de viés, a partir das quais fosse possível obter os esforços em função desse ângulo, com o intuito de generalizar as expressões do Anexo F do EC2.

No seguimento da observação constatada no que refere aos momentos adicionais assinalados por Gupta (1986) – em virtude de as forças internas de tracção na armadura e de compressão no betão para uma mesma camada, superior ou inferior, estarem em níveis diferentes –, assinala-se ser também este um aspecto a desenvolver em trabalhos futuros. Seria de todo oportuno fazer um conjunto de

aplicações que incorporasse estes momentos adicionais, de forma a constatar até que ponto poderão condicionar o dimensionamento das armaduras nas lajes.

BIBLIOGRAFIA

- Alves, J., “*Determinação de armaduras em elementos laminares (paredes) carregadas no seu próprio plano*”, Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil – 2007/2008 – Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2008
- Azevedo, A. F. M., “*Método dos elementos finitos*”, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- Bareš, R.; “*Tablas para el calculo de placas y vigas pared*”, Editorial Gustavo Gili, S.A, Barcelona, 1981
- British Standards Institution, “*Structural use of concrete, Part 1. Code of practice for design and construction*”, BS 8110, BSI, 1985, London.
- Eurocódigo 2, “*Projecto de Estruturas de Betão – Parte 1-1:Regras gerais para Edifícios*”, EN1992-1-1, Norma Europeia, Comité Europeu de Normalização, Abril, 2004.
- Ferreira, A. J. M., “*Elementos Finitos em Matlab*”, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2007.
- Fialkow, M. N., “*Strength Design of Shell Membrane Reinforcement*”, Journal of Structural Engineering, Vol. 109, No. 4, pp. 891-909, ASCE, 1983.
- Guerrero, D. O. B., “*Manual de interfaz gráfica de usuário en Matlab*”, Escuela de Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad Técnica Particular de Loja, 2007
- Gupta, A. K., “*Membrane Reinforcement in Shells*”, Journal of the Structural Division, January, 1981, v.107, pp. 41-56, Proceedings of the American Society of Civil Engineers.
- Gupta, A. K., “*Combined membrane and flexural reinforcement in plates and shellss*”, Journal of Structural Engineering, Vol. 112, No. 3, pp. 550-557, ASCE, 1986.
- Leonhardt, F.; Monning, E., “*Construções de concreto v. 2*”, Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1978.
- Lima, J. D’Arga e; Monteiro, V.; Mun, M.; “*Betão Armado – Esforços Normais e de Flexão*”, LNEC, Lisboa, 2004.
- Lourenço , P.B., “*Novas Metodologias para o Dimensionamento de Estruturas de Betão Armado*”, Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, 1992.
- Lourenço, P.B.; Figueiras, J.A., “*Automatic design of reinforcement in concrete plates and vaults*”, Engineering Computations, 10 (6), pp. 519-541, 1993.
- Lourenço , P.B.; Figueiras, J.A., “*Solution for the Design of Reinforced Concrete Plates and Shells*”, Journal of Structural Engineering, v.121, n.05, 199, p.815-823,1995.
- Montoya, P. J.; Meseguer, Álvaro G.; Cabré, F. M., “*Hormigón Armado: Ajustada al código modelo y al Eurocódigo*”, Editorial Gustavo Gili, SA, Barcelona, 14ª Edición, 2000.
- REBAP – Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado, INCM, Lisboa, 1983.

Telford, T., “*Model Code 1990 – Design Code*”, Comité Euro-International du Béton, London, 1991.

Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S., “*Theory of plates and shell*”, McGraw- Hill Book Company, second Edition, 1959.

Zienkiewicz, O. C., Taylor R. L., “*The Finite Element Method: The Basis*”, vol.1, McGraw Hill, Fifth Edition, 2000.

Anexo 1

**COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS POR
GUPTA E PELO PROGRAMA DESIGNSLAB COM BASE NO EC2**

A1: COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS POR GUPTA E PELO PROGRAMA DESIGNSLAB COM BASE NO EC2

Exemplo 1 – Elemento de laje sujeito a um campo de momentos genérico

Na Figura A.1 apresenta-se um elemento de laje sujeito a um campo de momentos genérico, sendo os materiais considerados o betão C20/25 e o aço S400. Admite-se os seguintes esforços:

- $M_x = 30 \text{ kN.m/m}$
- $M_y = -20 \text{ kN.m/m}$
- $M_{xy} = 25 \text{ kN.m/m}$

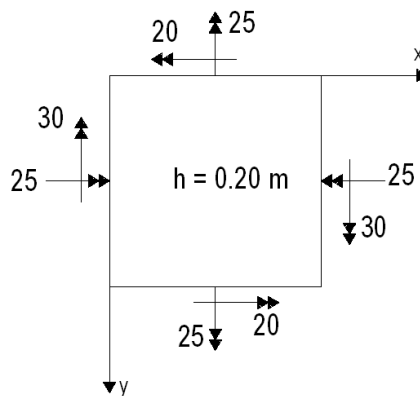


Fig. A.1. – Esforços presentes no elemento de laje.

▪ Segundo Gupta

Iteração 1:

Admite-se para a 1ª iteração que:

$$\begin{cases} h_x = h_y = 0,8h = 0,16\text{m} \\ a_t = a_b = 0,2h = 0,04\text{m} \\ h_c = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right) = h_x = h_y = 0,16\text{m} \end{cases}$$

Vem que:

$$\begin{cases} N_{sxt} = N_{xt} + N_{xyt} \operatorname{tg} \theta_t \\ N_{sxb} = N_{xb} + N_{xyt} \operatorname{tg} \theta_b \\ N_{syt} = N_{yt} + N_{xyt} \operatorname{cotg} \theta_t \\ N_{sxb} = N_{xb} + N_{xyb} \operatorname{cotg} \theta_b \end{cases}$$

Sendo que:

$$\begin{cases} N_{xt} = -\frac{M_x}{h_x} = -\frac{30}{0,16} = -187,5 \text{ kN / m} \\ N_{xb} = \frac{M_x}{h_x} = \frac{30}{0,16} = 187,5 \text{ kN / m} \\ N_{yt} = -\frac{M_y}{h_y} = \frac{20}{0,16} = 125 \text{ kN / m} \\ N_{yb} = \frac{M_y}{h_y} = -\frac{20}{0,16} = -125 \text{ kN / m} \\ N_{xyt} = -\frac{M_{xy}}{h_c} = -\frac{25}{0,16} = -156,25 \text{ kN / m} \\ N_{xyb} = \frac{M_{xy}}{h_c} = \frac{25}{0,16} = 156,25 \text{ kN / m} \end{cases}$$

Logo vem que

$$\begin{cases} N_{sxt} = -187,5 - 156,25 \operatorname{tg} \theta_t \\ N_{sxb} = 187,5 + 156,25 \operatorname{tg} \theta_b \\ N_{syt} = 125 - 156,25 \operatorname{cotg} \theta_t \\ N_{sxb} = -125 + 156,25 \operatorname{cotg} \theta_b \end{cases}$$

$$\text{Como nas camadas} \begin{cases} \text{Superior} \begin{cases} N_{xt} = -187,5 < -|-156,25| \\ N_{yt} = 125 > -|-156,25| \end{cases} \\ \text{Inferior} \begin{cases} N_{xb} = 187,5 > -|-156,25| \\ N_{yb} = -125 > -|-156,25| \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Então} \begin{cases} N_{sxt} = 0 = -187,5 - 156,25 \operatorname{tg} \theta_t \Leftrightarrow \theta_t = -50,19^\circ \\ \theta_b = 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_{ct} = \frac{2N_{xyt}}{\sin(2\theta_t)} = \frac{2 \times (-156,25)}{\sin(2 \times (-50,19^\circ))} = 317,70 \text{ kN / m} \Rightarrow a_t = \frac{317,70}{7,34 \times 10^3} = 0,0433 \text{ m} \\ -N_{cb} = \frac{2N_{xyb}}{\sin(2\theta_b)} = \frac{2 \times (156,25)}{\sin(2 \times (45^\circ))} = 312,5 \text{ kN / m} \Rightarrow a_b = \frac{312,5}{7,34 \times 10^3} = 0,0426 \text{ m} \end{cases}$$

Iteração 2:

$$\begin{cases} h_x = h_y = 0,8h = 0,16\text{m} \\ h_c = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right) = 0,15705\text{m} \end{cases}$$

Sendo a_t e a_b diferentes de $0,2h$ então os coeficientes cruzados tomam os seguintes valores:

$$\begin{cases} C_{tt} = 1,125 - \frac{0,625 \times 0,0433}{0,2} = 0,9897 \\ C_{tt} = -0,125 + \frac{0,625 \times 0,0426}{0,2} = 0,0081 \\ C_{tt} = -0,125 + \frac{0,625 \times 0,0433}{0,2} = 0,0103 \\ C_{tt} = 1,125 - \frac{0,625 \times 0,0426}{0,2} = 0,9919 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{xyt} = -\frac{25}{0,15705} = -159,18\text{kN / m} \\ N_{xyb} = \frac{25}{0,15705} = 159,18\text{kN / m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{sxt} = -187,5 - 159,18 \times 0,9897 \times \text{tg}\theta_t + 159,18 \times 0,0081 \times \text{tg}\theta_b \\ N_{syt} = 125 - 159,18 \times 0,9897 \times \text{cotg}\theta_t + 159,18 \times 0,0081 \times \text{cotg}\theta_b \\ N_{sxb} = 187,5 - 159,18 \times 0,0103 \times \text{tg}\theta_t + 159,18 \times 0,9919 \times \text{tg}\theta_b \\ N_{syb} = -125 - 159,18 \times 0,0103 \times \text{cotg}\theta_t + 159,18 \times 0,9919 \times \text{cotg}\theta_b \end{cases}$$

$$\text{Como nas camadas} \begin{cases} \text{Superior} \begin{cases} N_{xt} = -187,5 < -|-159,18| \\ N_{yt} = 125 > -|-159,18| \end{cases} \\ \text{Inferior} \begin{cases} N_{xb} = 187,5 > -|-159,18| \\ N_{yb} = -125 > -|-159,18| \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Então} \begin{cases} N_{sxt} = 0 = -187,5 - 159,18 \text{tg}\theta_t \Leftrightarrow \theta_t = -49,67^\circ \\ \theta_b = 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_{ct} = \frac{2N_{xyt}}{\sin(2\theta_t)} = \frac{2 \times (-159,18)}{\sin(2 \times (-49,67^\circ))} = 322,64\text{kN / m} \Rightarrow a_t = \frac{322,64}{7,34 \times 10^3} = 0,044\text{m} \\ -N_{cb} = \frac{2N_{xyb}}{\sin(2\theta_b)} = \frac{2 \times (159,18)}{\sin(2 \times (45^\circ))} = 318,36\text{kN / m} \Rightarrow a_b = \frac{318,36}{7,34 \times 10^3} = 0,0434\text{m} \end{cases}$$

Iteração 3:

$$\begin{cases} h_x = h_y = 0,8h = 0,16\text{m} \\ h_c = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right) = 0,1563\text{m} \end{cases}$$

Sendo a_t e a_b diferentes de $0,2h$ então os coeficientes cruzados tomam os seguintes valores:

$$\begin{cases} C_{tt} = 1,125 - \frac{0,625 \times 0,044}{0,2} = 0,9875 \\ C_{tb} = -0,125 + \frac{0,625 \times 0,0434}{0,2} = 0,0106 \\ C_{bt} = -0,125 + \frac{0,625 \times 0,044}{0,2} = 0,0125 \\ C_{bb} = 1,125 - \frac{0,625 \times 0,0434}{0,2} = 0,9894 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{xyt} = -\frac{25}{0,1563} = -159,95\text{kN / m} \\ N_{xyb} = \frac{25}{0,1563} = 159,95\text{kN / m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{sxt} = -187,5 - 159,95 \times 0,9875 \times \text{tg}\theta_t + 159,95 \times 0,0106 \times \text{tg}\theta_b \\ N_{syt} = 125 - 159,95 \times 0,9875 \times \text{cotg}\theta_t + 159,95 \times 0,0106 \times \text{cotg}\theta_b \\ N_{sxb} = 187,5 - 159,95 \times 0,0125 \times \text{tg}\theta_t + 159,95 \times 0,9894 \times \text{tg}\theta_b \\ N_{syb} = -125 - 159,95 \times 0,0125 \times \text{cotg}\theta_t + 159,95 \times 0,9894 \times \text{cotg}\theta_b \end{cases}$$

$$\text{Como nas camadas} \begin{cases} \text{Superior} \begin{cases} N_{xt} = -187,5 < -|-159,95| \\ N_{yt} = 125 > -|-159,95| \end{cases} \\ \text{Inferior} \begin{cases} N_{xb} = 187,5 > -|-159,95| \\ N_{yb} = -125 > -|-159,95| \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Então} \begin{cases} N_{sxt} = 0 = -187,5 - 159,95 \text{tg}\theta_t \Leftrightarrow \theta_t = -49,53^\circ \\ \theta_b = 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_{ct} = \frac{2N_{xyt}}{\sin(2\theta_t)} = \frac{2 \times (-159,95)}{\sin(2 \times (-49,53^\circ))} = 323,94\text{kN / m} \Rightarrow a_t = \frac{323,94}{7,34 \times 10^3} = 0,0442\text{m} \\ -N_{cb} = \frac{2N_{xyb}}{\sin(2\theta_b)} = \frac{2 \times (159,95)}{\sin(2 \times (45^\circ))} = 319,9\text{kN / m} \Rightarrow a_b = \frac{319,9}{7,34 \times 10^3} = 0,0436\text{m} \end{cases}$$

Iteração 4:

$$\begin{cases} h_x = h_y = 0,8h = 0,16\text{m} \\ h_c = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right) = 0,1561\text{m} \end{cases}$$

Sendo a_t e a_b diferentes de 0,2h então os coeficientes cruzados tomam os seguintes valores:

$$\begin{cases} C_{tt} = 1,125 - \frac{0,625 \times 0,0442}{0,2} = 0,9869 \\ C_{tb} = -0,125 + \frac{0,625 \times 0,0436}{0,2} = 0,01125 \\ C_{bt} = -0,125 + \frac{0,625 \times 0,0442}{0,2} = 0,0131 \\ C_{bb} = 1,125 - \frac{0,625 \times 0,0436}{0,2} = 0,9888 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{xyt} = -\frac{25}{0,1561} = -160,15\text{kN / m} \\ N_{xyb} = \frac{25}{0,1561} = 160,15\text{kN / m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{sxt} = -187,5 - 160,15 \times 0,9869 \times \text{tg}\theta_t + 160,15 \times 0,0113 \times \text{tg}\theta_b \\ N_{syt} = 125 - 160,15 \times 0,9869 \times \text{cotg}\theta_t + 160,15 \times 0,0113 \times \text{cotg}\theta_b \\ N_{sxb} = 187,5 - 160,15 \times 0,0131 \times \text{tg}\theta_t + 160,15 \times 0,9888 \times \text{tg}\theta_b \\ N_{syb} = -125 - 160,15 \times 0,0131 \times \text{cotg}\theta_t + 160,15 \times 0,9888 \times \text{cotg}\theta_b \end{cases}$$

$$\text{Como nas camadas} \begin{cases} \text{Superior} \begin{cases} N_{xt} = -187,5 < -|-160,15| \\ N_{yt} = 125 > -|-160,15| \end{cases} \\ \text{Inferior} \begin{cases} N_{xb} = 187,5 > -|-160,15| \\ N_{yb} = -125 > -|-160,15| \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Então} \begin{cases} N_{sxt} = 0 = -187,5 - 160,15 \text{tg}\theta_t \Leftrightarrow \theta_t = -49,50^\circ \\ \theta_b = 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_{ct} = \frac{2N_{xyt}}{\sin(2\theta_t)} = \frac{2 \times (-160,15)}{\sin(2 \times (-49,50^\circ))} = 324,29\text{kN / m} \Rightarrow a_t = \frac{324,29}{7,34 \times 10^3} = 0,0442\text{m} \Rightarrow \text{O.K.} \\ -N_{cb} = \frac{2N_{xyb}}{\sin(2\theta_b)} = \frac{2 \times (160,15)}{\sin(2 \times (45^\circ))} = 320,3\text{kN / m} \Rightarrow a_b = \frac{320,3}{7,34 \times 10^3} = 0,0436\text{m} \Rightarrow \text{O.K.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{sxt} = -187,5 - 160,15 \times 0,9869 \times \operatorname{tg}(-49,5^\circ) + 160,15 \times 0,0113 \times \operatorname{tg}(45^\circ) \\ N_{syt} = 125 - 160,15 \times 0,9869 \times \cotg(-49,5^\circ) + 160,15 \times 0,0113 \times \cotg(45^\circ) \\ N_{sxb} = 187,5 - 160,15 \times 0,0131 \times \operatorname{tg}(-49,5^\circ) + 160,15 \times 0,9888 \times \operatorname{tg}(45^\circ) \\ N_{syb} = -125 - 160,15 \times 0,0131 \times \cotg(-49,5^\circ) + 160,15 \times 0,9888 \times \cotg(45^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} N_{sxt} = -187,5 + 185,06 + 1,81 \cong 0 \\ N_{syt} = 125 + 134,99 + 1,81 = 261,8 \text{ kN / m} \\ N_{sxb} = 187,5 + 2,46 + 158,36 = 348,32 \text{ kN / m} \\ N_{syb} = -125 + 1,79 + 158,36 = 35,15 \text{ kN / m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{sxt} = 0 \\ A_{syt} = 261,8 / 34,8 = 7,52 \text{ cm}^2 / \text{m} \\ A_{sxb} = 348,32 / 34,8 = 10,01 \text{ cm}^2 / \text{m} \\ A_{syb} = 35,15 / 34,8 = 1,01 \text{ cm}^2 / \text{m} \end{cases}$$

▪ Segundo Código Computacional – EC2

Iteração 1:

Admitindo que $a_t = a_b = 0,2h = 0,04$ e $z = 0,16$ m, vem que

i) Camada Superior

$$\begin{cases} \sigma_{xt} = -\frac{mx}{z \times a_t} = -\frac{30}{0,16 \times 0,04} = -4,6875 \text{ MPa (Comp.)} \\ \sigma_{yt} = \frac{my}{z \times a_t} = \frac{20}{0,16 \times 0,04} = 3,125 \text{ MPa (Tracção)} \\ \tau_{xyt} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,16 \times 0,04} = 3,90625 \text{ MPa} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_{Edxt} = 4,6875 \text{ MPa (Comp.)} \\ \sigma_{Edyt} = -3,125 \text{ MPa (Tracção)} \\ \tau_{Edxyt} = 3,90625 \text{ MPa} \end{cases}$$

Neste caso estamos perante o ponto (4) do EC2 (Anexo F):

- Nas zonas em que σ_{Edy} é uma tensão de tracção ou em $\sigma_{Edx} \cdot \sigma_{Edy} \leq \tau_{Edxy}^2$, são necessárias armaduras.

Como se pode ver pela Figura A.1, a σ_{yt} é uma tensão de tracção, condição para que sejam assim necessárias armaduras.

Nestes casos, as quantidade óptimas de armadura, identificadas pelo índice superior ‘, e a correspondente tensão no betão são determinadas por:

Para $\sigma_{Edx} > |\tau_{Edxy}|$ (4,6875 > 3,90625)

$$\begin{cases} f'_{tdx} = 0 \\ f'_{tdy} = \frac{\tau_{Edxy}^2}{\sigma_{Edx}} - \sigma_{Edy} \\ \sigma_{cd} = \sigma_{Edx} \left(1 + \left(\frac{\tau_{Edxy}}{\sigma_{Edx}} \right)^2 \right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f'_{tdx} = 0 \\ f'_{tdy} = \frac{3,90625^2}{4,6875} - (-3,125) = 6,38 \text{MPa} \\ \sigma_{cd} = 4,6875 \left(1 + \left(\frac{3,90625}{4,6875} \right)^2 \right) = 7,943 \text{MPa} > v.fcd = 7,34 \text{MPa} \end{cases}$$

$$a_t = \frac{7,943 \cdot 0,04}{7,34} = 0,0433 \text{ m}$$

ii) Camada Inferior

$$\begin{cases} \sigma_{xb} = \frac{mx}{z \times a_t} = \frac{30}{0,16 \times 0,04} = 4,6875 \text{MPa (Tracção)} \\ \sigma_{yb} = -\frac{my}{z \times a_t} = -\frac{20}{0,16 \times 0,04} = -3,125 \text{MPa (Comp.)} \\ \tau_{xyb} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,16 \times 0,04} = 3,90625 \text{MPa} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_{Edxb} = 3,125 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{Edyb} = -4,6875 \text{MPa (Tracção)} \\ \tau_{Edxyb} = 3,90625 \text{MPa} \end{cases}$$

Repare-se que efectuou-se uma troca de eixos, dado que segundo o ponto (2) no EC2 as tensões de compressão são consideradas positivas, com $\sigma_{Edx} > \sigma_{Edy}$. Determinadas as respectivas armaduras, efectuar-se-à nova troca de eixos para que a armadura esteja segundo a direcção correspondente.

Neste caso estamos perante o ponto (4) do EC2 (Anexo F):

• Nas zonas em que σ_{Edy} é uma tensão de tracção ou em $\sigma_{Edx} \cdot \sigma_{Edy} \leq \tau_{Edxy}^2$, são necessárias armaduras.

Como se pode ver pela figura 3.2.2., a σ_{yt} é uma tensão de tracção, condição para que sejam assim necessárias armaduras.

Nestes casos, as quantidade óptimas de armadura, identificadas pelo índice superior ‘, e a correspondente tensão no betão são determinadas por:

$$\text{Para } \sigma_{Edx} \leq |\tau_{Edxy}| \quad (3,125 < 3,90625)$$

$$\begin{cases} f'_{tdx} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edx} \\ f'_{tdy} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edy} \Leftrightarrow \\ \sigma_{cd} = 2|\tau_{Edxy}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_{tdx} = 3,90625 - 3,125 = 0,78125 \text{MPa} \\ f'_{tdy} = 3,90625 - (-4,6875) = 8,594 \text{MPa} \\ \sigma_{cd} = 2 \times 3,90625 = 7,8125 \text{MPa} > v.fcd = 7,34 \text{MPa} \end{cases}$$

$$a_b = \frac{7,8125 \times 0,04}{7,34} = 0,0426 \text{ m}$$

Iteração 2:

$$\left\{ z = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right) = 0,20 - \left(\frac{0,0433 + 0,0426}{2} \right) = 0,015705 \text{m} \right.$$

i) Camada Superior

$$\begin{cases} \sigma_{xt} = -\frac{mx}{z \times a_t} = -\frac{30}{0,15705 \times 0,0433} = -4,412 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{yt} = \frac{my}{z \times a_t} = \frac{20}{0,15705 \times 0,0433} = 2,941 \text{MPa (Tracção)} \\ \tau_{xyt} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,15705 \times 0,0433} = 3,676 \text{MPa} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_{Edxt} = 4,412 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{Edyt} = -2,942 \text{MPa (Tracção)} \\ \tau_{Edxyt} = 3,676 \text{MPa} \end{cases}$$

Para $\sigma_{Edx} > |\tau_{Edxy}|$ (4,412 > 3,676)

$$\begin{cases} f'_{tdx} = 0 \\ f'_{tdy} = \frac{\tau_{Edxy}^2}{\sigma_{Edx}} - \sigma_{Edy} \\ \sigma_{cd} = \sigma_{Edx} \left(1 + \left(\frac{\tau_{Edxy}}{\sigma_{Edx}} \right)^2 \right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f'_{tdx} = 0 \\ f'_{tdy} = \frac{3,676^2}{4,412} - (-2,941) = 6,00 \text{MPa} \\ \sigma_{cd} = 4,412 \left(1 + \left(\frac{3,676}{4,412} \right)^2 \right) = 7,475 \text{MPa} > v.fcd = 7,34 \text{MPa} \end{cases}$$

$$a_t = \frac{7,475 \times 0,0433}{7,34} = 0,0441 \text{ m}$$

ii) Camada Inferior

$$\begin{cases} \sigma_{xb} = \frac{mx}{z \times a_t} = \frac{30}{0,15705 \times 0,0426} = 4,484 \text{MPa (Tracção)} \\ \sigma_{yb} = -\frac{my}{z \times a_t} = -\frac{20}{0,15705 \times 0,0426} = -2,989 \text{MPa (Comp.)} \Leftrightarrow \\ \tau_{xyb} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,15705 \times 0,0426} = 3,737 \text{MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{Edxb} = 2,989 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{Edyb} = -4,484 \text{MPa (Tracção)} \\ \tau_{Edxyb} = 3,737 \text{MPa} \end{cases}$$

Para $\sigma_{Edx} \leq |\tau_{Edxy}|$ (2,989 < 3,737)

$$\begin{cases} f'_{tdx} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edx} \\ f'_{tdy} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edy} \Leftrightarrow \\ \sigma_{cd} = 2|\tau_{Edxy}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_{tdx} = 3,737 - 2,989 = 0,75 \text{MPa} \\ f'_{tdy} = 3,737 - (-4,484) = 8,22 \text{MPa} \\ \sigma_{cd} = 2 \times 3,737 = 7,47 \text{MPa} > v.fcd = 7,34 \text{MPa} \end{cases}$$

$$a_b = \frac{7,47 \times 0,0426}{7,34} = 0,0434 \text{ m}$$

Iteração 3:

$$\left\{ z = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right) = 0,20 - \left(\frac{0,0441 + 0,0434}{2} \right) = 0,015625 \text{m} \right.$$

i) Camada Superior

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xt} = -\frac{mx}{z \times a_t} = -\frac{30}{0,15625 \times 0,0441} = -4,35 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{yt} = \frac{my}{z \times a_t} = \frac{20}{0,15625 \times 0,0441} = 2,90 \text{MPa (Tracção)} \Leftrightarrow \\ \tau_{xyt} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,15625 \times 0,0441} = 3,63 \text{MPa} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{Edxt} = 4,35 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{Edyt} = -2,90 \text{MPa (Tracção)} \\ \tau_{Edxyt} = 3,63 \text{MPa} \end{array} \right.$$

Para $\sigma_{Edx} > |\tau_{Edxy}|$ (4,35 > 3,63)

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_{tdx} = 0 \\ f'_{tdy} = \frac{\tau_{Edxy}^2}{\sigma_{Edx}} - \sigma_{Edy} \Leftrightarrow \\ \sigma_{cd} = \sigma_{Edx} \left(1 + \left(\frac{\tau_{Edxy}}{\sigma_{Edx}} \right)^2 \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_{tdx} = 0 \\ f'_{tdy} = \frac{3,63^2}{4,35} - (-2,90) = 5,93 \text{MPa} \\ \sigma_{cd} = 4,35 \left(1 + \left(\frac{3,63}{4,35} \right)^2 \right) = 7,38 \text{MPa} > v.fcd = 7,34 \text{MPa} \end{array} \right.$$

$$a_t = \frac{7,38 \times 0,0441}{7,34} = 0,0443 \text{ m}$$

ii) Camada Inferior

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xb} = \frac{mx}{z \times a_t} = \frac{30}{0,15625 \times 0,0434} = 4,42 \text{MPa (Tracção)} \\ \sigma_{yb} = -\frac{my}{z \times a_t} = -\frac{20}{0,15625 \times 0,0434} = -2,95 \text{MPa (Comp.)} \Leftrightarrow \\ \tau_{xyb} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,15625 \times 0,0434} = 3,69 \text{MPa} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sigma_{Edxb} = 2,95 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{Edyby} = -4,42 \text{MPa (Tracção)} \\ \tau_{Edxyb} = 3,69 \text{MPa} \end{cases}$$

Para $\sigma_{Edx} \leq |\tau_{Edxy}|$ $(2,95 < 3,69)$

$$\begin{cases} f'_{tdx} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edx} \\ f'_{tdy} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edy} \Leftrightarrow \\ \sigma_{cd} = 2|\tau_{Edxy}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_{tdx} = 3,69 - 2,95 = 0,74 \text{MPa} \\ f'_{tdy} = 3,69 - (-4,42) = 8,11 \text{MPa} \\ \sigma_{cd} = 2 \times 3,69 = 7,38 \text{MPa} > v.fcd = 7,34 \text{MPa} \end{cases}$$

$$a_b = \frac{7,38 \times 0,0434}{7,34} = 0,0436 \text{ m}$$

Iteração 4:

$$z = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right) = 0,20 - \left(\frac{0,0443 + 0,0436}{2} \right) = 0,0156 \text{ m}$$

i) Camada Superior

$$\begin{cases} \sigma_{xt} = -\frac{mx}{z \times a_t} = -\frac{30}{0,156 \times 0,0443} = -4,34 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{yt} = \frac{my}{z \times a_t} = \frac{20}{0,156 \times 0,0443} = 2,89 \text{MPa (Tracção)} \Leftrightarrow \\ \tau_{xyt} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,156 \times 0,0443} = 3,62 \text{MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\text{Edxt}} = 4,34 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{\text{Edyt}} = -2,89 \text{MPa (Tração)} \\ \tau_{\text{Edxyt}} = 3,62 \text{MPa} \end{cases}$$

Para $\sigma_{\text{Edx}} > |\tau_{\text{Edxy}}|$ (4,34 > 3,62)

$$\begin{cases} f'_{\text{tdx}} = 0 \\ f'_{\text{tdy}} = \frac{\tau_{\text{Edxy}}^2}{\sigma_{\text{Edx}}} - \sigma_{\text{Edy}} \Leftrightarrow \\ \sigma_{\text{cd}} = \sigma_{\text{Edx}} \left(1 + \left(\frac{\tau_{\text{Edxy}}}{\sigma_{\text{Edx}}} \right)^2 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_{\text{tdx}} = 0 \\ f'_{\text{tdy}} = \frac{3,62^2}{4,34} - (-2,89) = 5,91 \text{MPa} \\ \sigma_{\text{cd}} = 4,34 \left(1 + \left(\frac{3,62}{4,34} \right)^2 \right) = 7,36 \text{MPa} > v.\text{fcd} = 7,34 \text{MPa} \end{cases}$$

$$a_t = \frac{7,36 \cdot 0,0443}{7,34} = 0,0444 \text{ m}$$

ii) Camada Inferior

$$\begin{cases} \sigma_{\text{x b}} = \frac{mx}{z \times a_t} = \frac{30}{0,156 \times 0,0436} = 4,41 \text{MPa (Tração)} \\ \sigma_{\text{y b}} = -\frac{my}{z \times a_t} = -\frac{20}{0,156 \times 0,0436} = -2,94 \text{MPa (Comp.)} \Leftrightarrow \\ \tau_{\text{xyb}} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,156 \times 0,0436} = 3,68 \text{MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\text{Edxb}} = 2,94 \text{MPa (Comp.)} \\ \sigma_{\text{Edyb}} = -4,41 \text{MPa (Tração)} \\ \tau_{\text{Edxyb}} = 3,68 \text{MPa} \end{cases}$$

Para $\sigma_{Edx} \leq |\tau_{Edxy}|$ (2,94 < 3,68)

$$\begin{cases} f'_{tdx} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edx} \\ f'_{tdy} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edy} \Leftrightarrow \\ \sigma_{cd} = 2|\tau_{Edxy}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_{tdx} = 3,68 - 2,94 = 0,74 \text{ MPa} \\ f'_{tdy} = 3,68 - (-4,41) = 8,09 \text{ MPa} \\ \sigma_{cd} = 2 \times 3,68 = 7,36 \text{ MPa} > v.fcd = 7,34 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$a_b = \frac{7,36 \times 0,0436}{7,34} = 0,0437 \text{ m}$$

Iteração 5:

$$z = h - \left(\frac{a_t + a_b}{2} \right) = 0,20 - \left(\frac{0,0444 + 0,0437}{2} \right) = 0,0156 \text{ m}$$

i) Camada Superior

$$\begin{cases} \sigma_{xt} = -\frac{mx}{z \times a_t} = -\frac{30}{0,156 \times 0,0444} = -4,33 \text{ MPa (Comp.)} \\ \sigma_{yt} = \frac{my}{z \times a_t} = \frac{20}{0,156 \times 0,0444} = 2,89 \text{ MPa (Tracção)} \Leftrightarrow \\ \tau_{xyt} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,156 \times 0,0444} = 3,61 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{Edxt} = 4,33 \text{ MPa (Comp.)} \\ \sigma_{Edyt} = -2,89 \text{ MPa (Tracção)} \\ \tau_{Edxyt} = 3,61 \text{ MPa} \end{cases}$$

Para $\sigma_{Edx} > |\tau_{Edxy}|$ (4,33 > 3,612)

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_{tdx} = 0 \\ f'_{tdy} = \frac{\tau_{Edxy}^2}{\sigma_{Edx}} - \sigma_{Edy} \\ \sigma_{cd} = \sigma_{Edx} \left(1 + \left(\frac{\tau_{Edxy}}{\sigma_{Edx}} \right)^2 \right) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_{tdx} = 0 \\ f'_{tdy} = \frac{3,61^2}{4,33} - (-2,89) = 5,90 \text{ MPa} \\ \sigma_{cd} = 4,33 \left(1 + \left(\frac{3,61}{4,33} \right)^2 \right) = 7,34 \text{ MPa} \leq v.fcd = 7,34 \text{ MPa} \Rightarrow \text{O.K.} \end{array} \right.$$

$$a_t = 0,0444 \text{ m}$$

ii) Camada Inferior

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xb} = \frac{mx}{z \times a_t} = \frac{30}{0,156 \times 0,0437} = 4,40 \text{ MPa (Tracção)} \\ \sigma_{yb} = -\frac{my}{z \times a_t} = -\frac{20}{0,156 \times 0,0437} = -2,93 \text{ MPa (Comp.)} \\ \tau_{xyb} = \frac{mxy}{z \times a_t} = \frac{25}{0,156 \times 0,0437} = 3,67 \text{ MPa} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{Edxb} = 2,93 \text{ MPa (Comp.)} \\ \sigma_{Edyb} = -4,40 \text{ MPa (Tracção)} \\ \tau_{Edxyb} = 3,67 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$\text{Para } \sigma_{Edx} \leq |\tau_{Edxy}| \quad (2,934 < 3,67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_{tdx} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edx} \\ f'_{tdy} = |\tau_{Edxy}| - \sigma_{Edy} \\ \sigma_{cd} = 2|\tau_{Edxy}| \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f'_{tdx} = 3,67 - 2,93 = 0,74 \text{ MPa} \\ f'_{tdy} = 3,67 - (-4,40) = 8,07 \text{ MPa} \\ \sigma_{cd} = 2 \times 3,67 = 7,34 \text{ MPa} \leq v.fcd = 7,34 \text{ MPa} \Rightarrow \text{O.K.} \end{cases}$$

$$a_b = 0,0437 \text{ m}$$

Determinação da percentagem de armadura:

$$\rho_x = \frac{f_{tdx}}{f_{syd}} \quad \rho_y = \frac{f_{tdy}}{f_{syd}}$$

Determinação das áreas de armadura:

$$\begin{cases} A_{sxt} = \rho_x \cdot a_t = 0 \\ A_{syt} = \rho_y \cdot a_t = \frac{5,90}{348} \times 0,0444 = 7,53 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = \rho_x \cdot a_b = \frac{0,74}{348} \times 0,0437 = 0,93 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = \rho_y \cdot a_b = \frac{8,07}{348} \times 0,0437 = 10,01 \text{ cm}^2/\text{m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_{sxt} = 0 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syt} = 7,53 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = 10,01 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = 0,93 \text{ cm}^2/\text{m} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} A_{sxt} = 0 \\ A_{syt} = 261,8/34,8 = 7,52 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = 348,32/34,8 = 10,01 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = 35,15/34,8 = 1,01 \text{ cm}^2/\text{m} \end{array} \right) \text{ resultados segundo Gupta.}$$

Repare-se que nesta parte final depois de determinadas as armaduras, é efectuada novamente uma troca de eixos, à imagem do que foi referido no início do processo iterativo para este exemplo segundo a metodologia do EC2. Assim, tendo presente os resultados obtidos segundo a metodologia de Gupta, verifica-se que estes são muito próximos.

Na Figura A.2, constata-se a visualização dos resultados obtidos pelo programa DesignSlab, atestando os resultados obtidos pelas iterações aqui desenvolvidas, uma vez que é o que o programa executa, tendo como base a metodologia descrita no Anexo F da versão de 2004 do EC2.

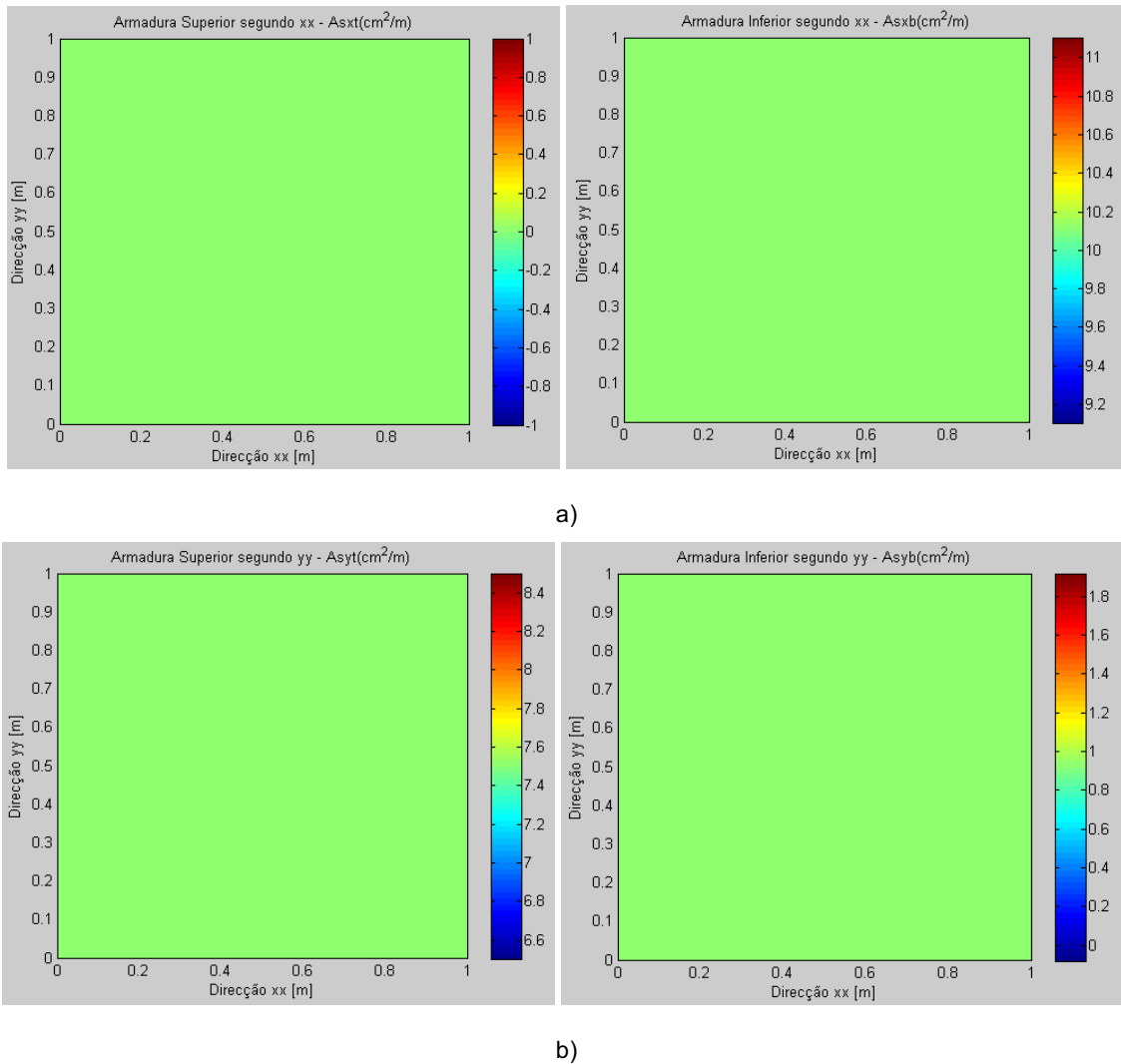


Fig. A.2 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y

Exemplo 2 – Compressão bi-axial na camada inferior com torsores

Na Figura A.3 apresenta-se um elemento de laje sujeito a um campo de momentos genérico, sendo os materiais considerados o betão C20/25 e o aço S400. Admite-se os seguintes esforços:

- $M_x = 40 \text{ kN.m/m}$
- $M_y = 20 \text{ kN.m/m}$
- $M_{xy} = 25 \text{ kN.m/m}$

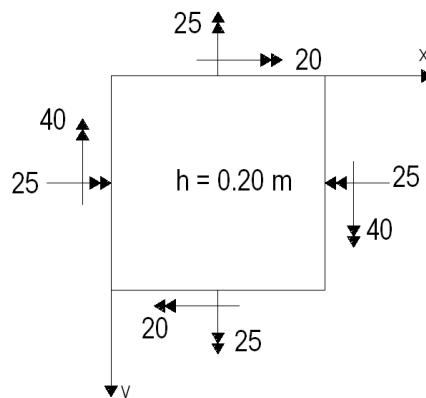


Fig. A.3 – Esforços presentes no elemento de laje.

▪ Segundo Gupta

Ao fim de 3 iterações obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_t = -59,09^\circ \\ \theta_b = 45^\circ \\ a_t = 0,025\text{m} \\ a_b = 0,041\text{m} \\ N_{sxt} \cong -3,39\text{kN} / \text{m} \\ N_{syt} = -31,63\text{kN} / \text{m} \\ N_{sxb} = 387,51\text{kN} / \text{m} \\ N_{syb} = 270,04\text{kN} / \text{m} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{sxt} = 0\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{syt} = 0\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = 387,9/34,8 = 11,15\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = 270,89/34,8 = 7,78\text{cm}^2/\text{m} \end{array} \right.$$

▪ Segundo Código Computacional – EC2

No caso do código computacional obtiveram-se os seguintes valores, também ao fim de 4 iterações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_t = 45^\circ \\ \theta_b = -45^\circ \\ a_t = 0,0175\text{m} \\ a_b = 0,040\text{m} \\ f'_{tdxt} = 0\text{MPa} \\ f'_{tdyt} = 0\text{MPa} \\ f'_{tdxb} = 6,57\text{MPa} \\ f'_{tdyb} = 9,49\text{MPa} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A_{sxt} = 0 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syt} = 0 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = 7,55 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = 10,91 \text{ cm}^2/\text{m} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A_{sxt} = 0 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syt} = 0 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = 10,91 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = 7,55 \text{ cm}^2/\text{m} \end{cases}$$

Note-se a troca de eixos. Também para este exemplo os resultados obtidos pelo processo iterativo usado no programa DesignSlab são muito próximos dos homólogos obtidos por Gupta.

Na Figura A.4 ilustram-se os resultados obtidos pelo programa DesignSlab.

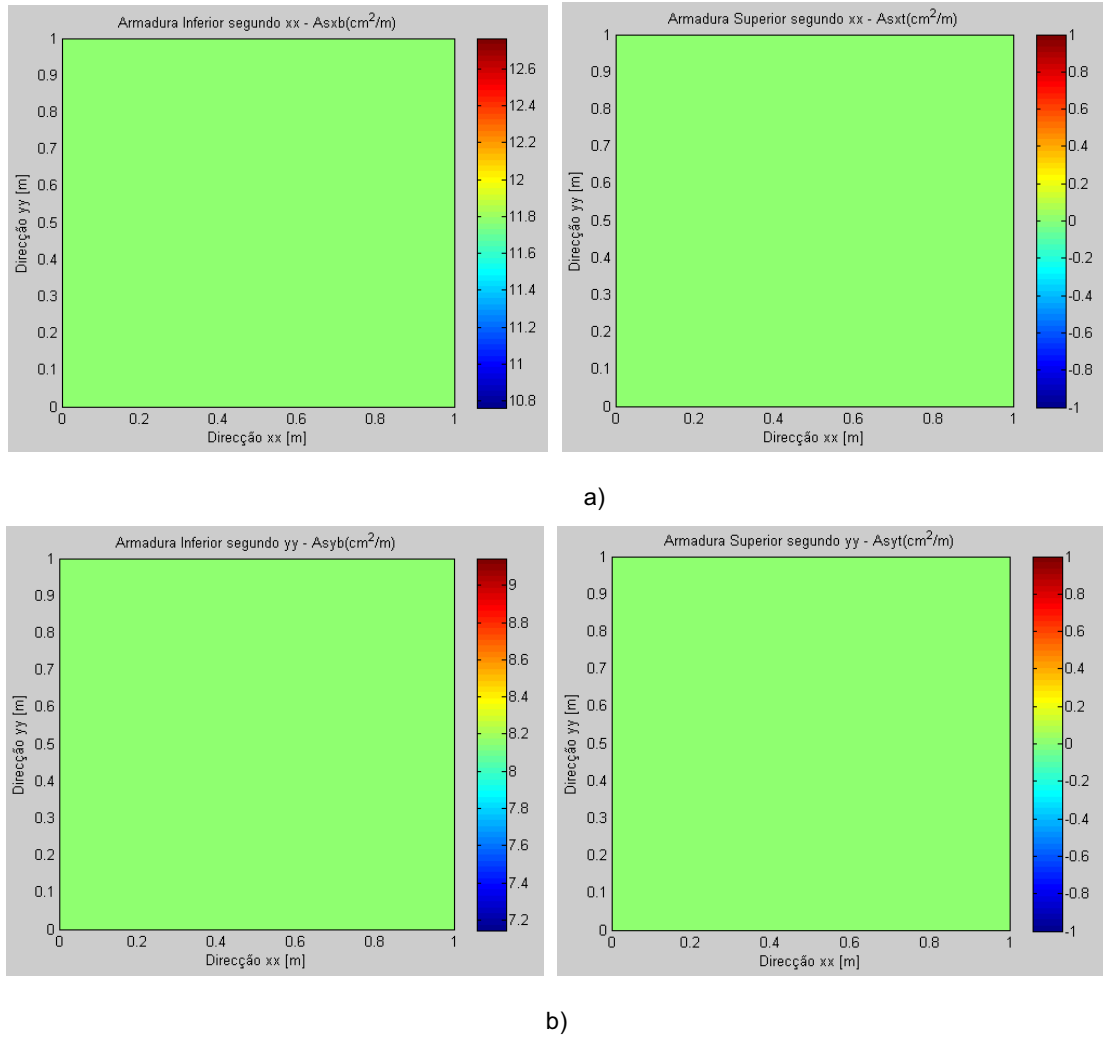


Fig. A.4 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y

Exemplo 3 – Compressões e Tracções na mesma Camada.

Na Figura A.5 apresenta-se um elemento de laje sujeito a um campo de momentos genérico, sendo os materiais considerados os betão C20/25 e o aço S400. Admite-se os seguintes esforços:

- $M_x = 40 \text{ kN.m/m}$
- $M_y = -20 \text{ kN.m/m}$
- $M_{xy} = 0 \text{ kN.m/m}$

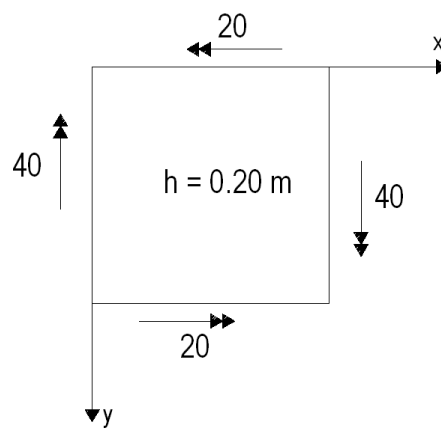


Fig. A.5 – Esforços presentes no elemento de laje.

▪ Segundo Gupta

Ao fim de 3 iterações obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_t = 45^\circ \\ \theta_b = -45^\circ \\ a_t = 0,0334\text{m} \\ a_b = 0,0158\text{m} \\ N_{sxt} = -244,65\text{kN / m} \\ N_{syt} = 116,21\text{kN / m} \\ N_{sxb} = 244,95\text{kN / m} \\ N_{syb} = -116,08\text{kN / m} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A_{sxt} = 0 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syt} = 116,21/34.8 = 3,34 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = 244,95/34.8 = 7,04 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = 0 \text{ cm}^2/\text{m} \end{cases}$$

▪ **Segundo Código Computacional – EC2**

No caso do código computacional obtiveram-se os seguintes valores, também ao fim de 4 iterações:

$$\begin{cases} \theta_t = 45^\circ \\ \theta_b = -45^\circ \\ a_t = 0,031 \text{ m} \\ a_b = 0,0155 \text{ m} \\ f'_{tdxt} = 0 \text{ MPa} \\ f'_{tdyt} = 0 \text{ MPa} \\ f'_{tdxb} = 3,64 \text{ MPa} \\ f'_{tdyb} = 14,57 \text{ MPa} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A_{sxt} = 0 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syt} = \frac{3,64}{348} \times 0,031 = 3,24 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = \frac{14,57}{348} \times 0,0155 = 6,50 \text{ cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = 0 \text{ cm}^2/\text{m} \end{cases}$$

Para o presente exemplo não houve a necessidade da troca de eixos. Embora se note uma ligeira diferença entre o valor da armadura inferior segundo a direcção x obtido pela metodologia usada no DesignSlab e pelo Gupta, também para este exemplo os resultados determinados pelas duas metodologias são bastante próximos.

Na Figura A.6 apresentam-se os resultados obtidos pelo programa DesignSlab.

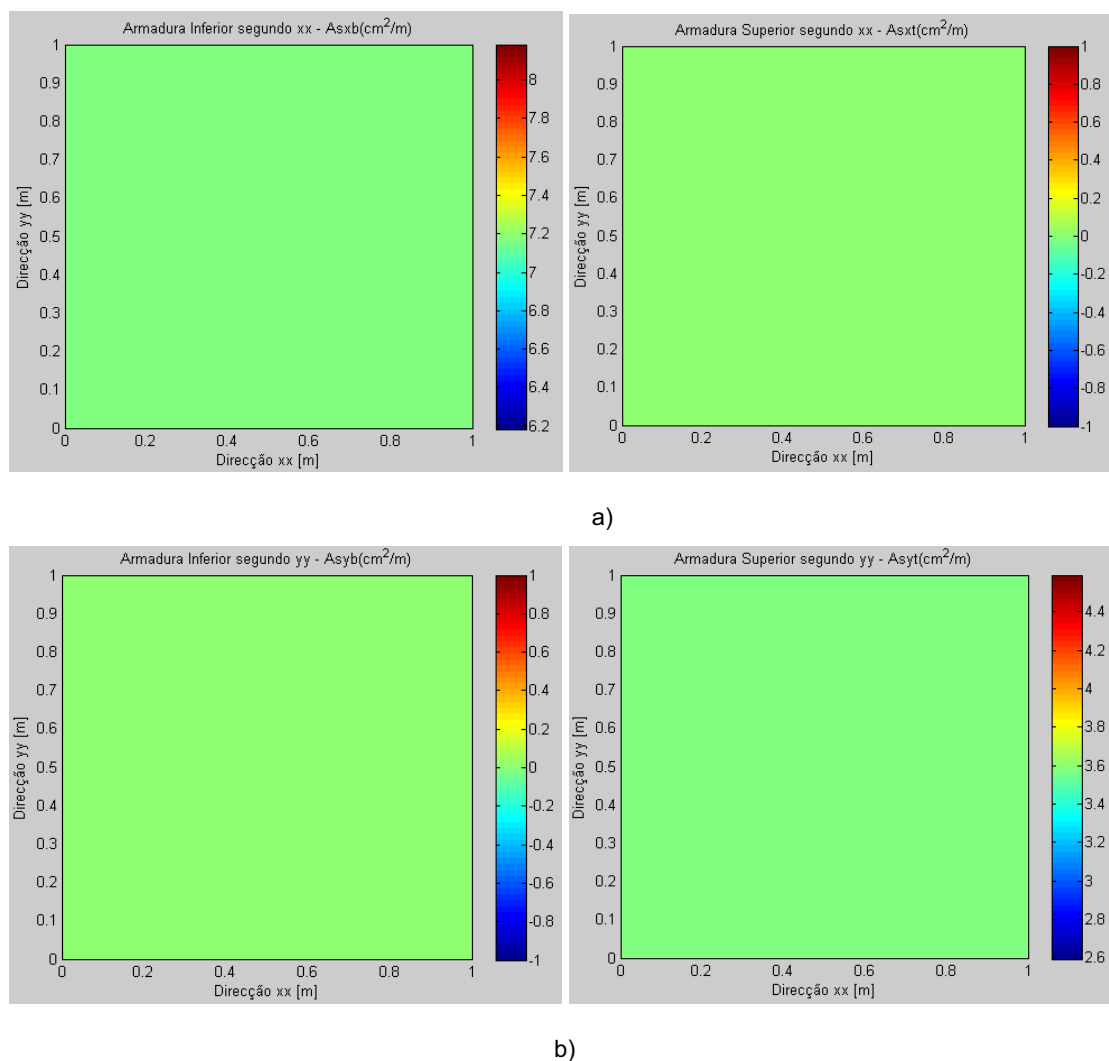


Fig. A.6 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y

Exemplo 4 – Compressão bi-axial na Camada Superior

Na Figura A.7 apresenta-se um elemento de laje sujeito a um campo de momentos genérico, sendo os materiais considerados o betão C20/25 e o aço S400. Admite-se os seguintes esforços:

- $M_x = 40 \text{ kN.m/m}$
- $M_y = 20 \text{ kN.m/m}$
- $M_{xy} = 0 \text{ kN.m/m}$

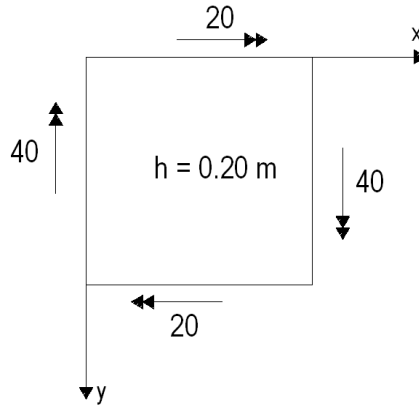


Fig. A.7 – Esforços presentes no elemento de laje.

Este exemplo é semelhante ao anterior, diferindo apenas no facto que A_{syt} passa a A_{syb} . Na Figura A.8 constam os resultados obtidos pelo programa Design Slab.

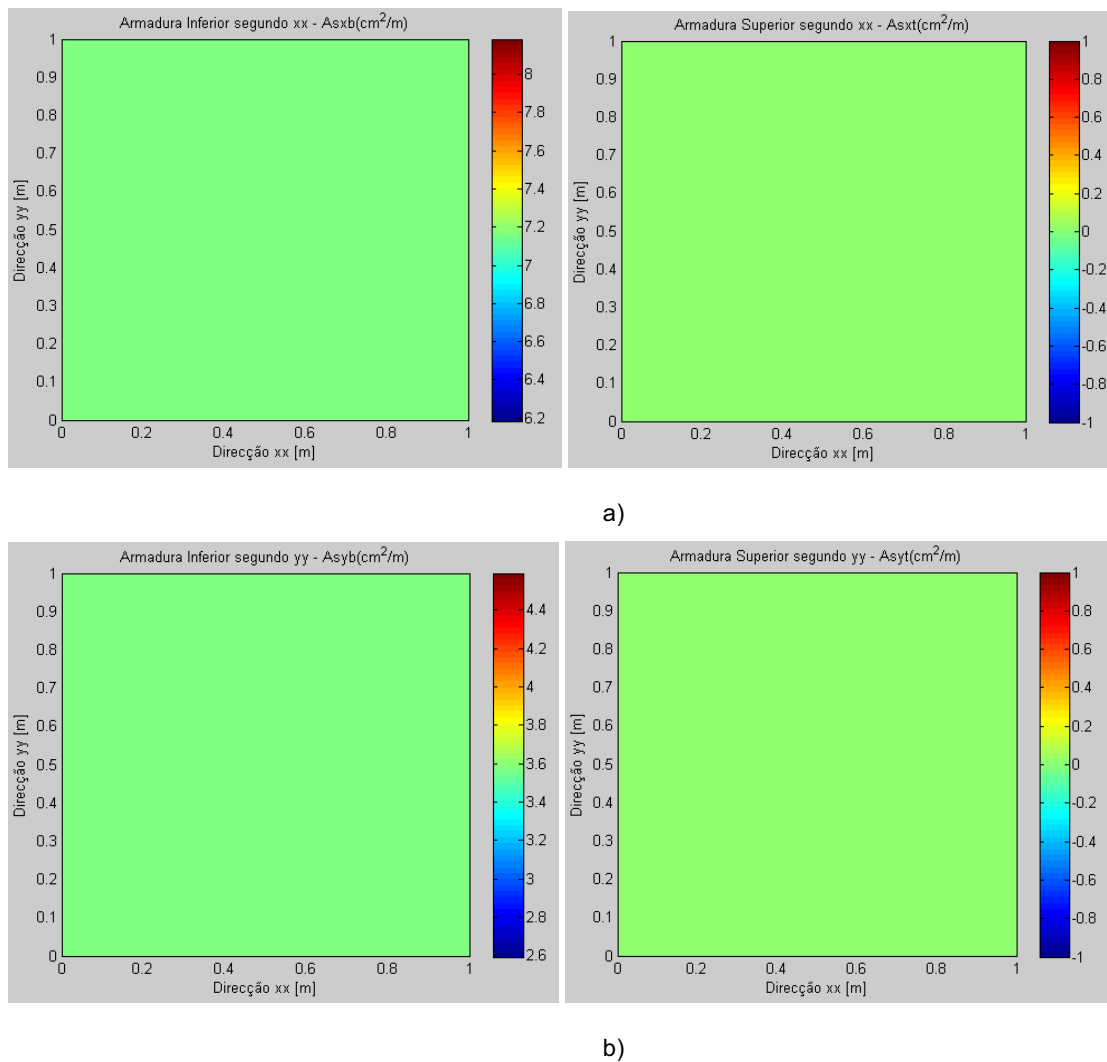


Fig. A.8 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y

EXEMPLO 5 – MOMENTO TORSOR PURO

Na Figura A.9 apresenta-se um elemento de laje sujeito a um campo de momentos genérico, sendo os materiais considerados o betão C20/25 e o aço S400. Admite-se os seguintes esforços:

- $M_x = 0 \text{ kN.m/m}$
- $M_y = 0 \text{ kN.m/m}$
- $M_{xy} = 25 \text{ kN.m/m}$

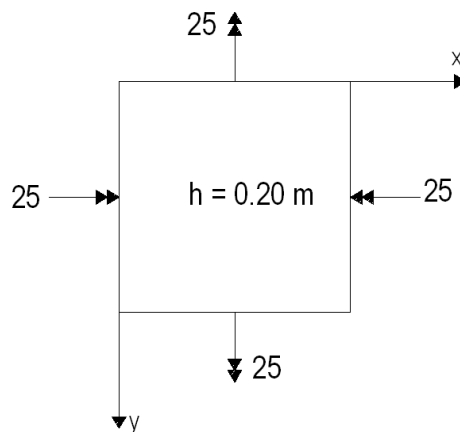


Fig. A.8 – Esforços presentes no elemento de laje.

▪ Segundo Gupta

Ao fim de 4 iterações obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_t = 45^\circ \\ \theta_b = -45^\circ \\ a_t = 0,0435\text{m} \\ a_b = 0,0435\text{m} \\ N_{sxt} = -156,25\text{kN / m} \\ N_{syt} = 156,25\text{kN / m} \\ N_{sxb} = 156,25\text{kN / m} \\ N_{syb} = -156,25\text{kN / m} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{sxt} = 156,25/34,8 = 4,49\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{syt} = 156,25/34,8 = 4,49\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = 156,25/34,8 = 4,49\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = 156,25/34,8 = 4,49\text{cm}^2/\text{m} \end{array} \right.$$

▪ Segundo Código Computacional – EC2

No caso do código computacional obtiveram-se os seguintes valores, também ao fim de 4 iterações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_t = 45^\circ \\ \theta_b = -45^\circ \\ a_t = 0,0435\text{m} \\ a_b = 0,0435\text{m} \\ f'_{tdxt} = 3,67\text{MPa} \\ f'_{tdyt} = 3,67\text{MPa} \\ f'_{tdxb} = 3,67\text{MPa} \\ f'_{tdyb} = 3,67\text{MPa} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_{sxt} = 4,59\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{syt} = 4,59\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{sxb} = 4,59\text{cm}^2/\text{m} \\ A_{syb} = 4,59\text{cm}^2/\text{m} \end{array} \right.$$

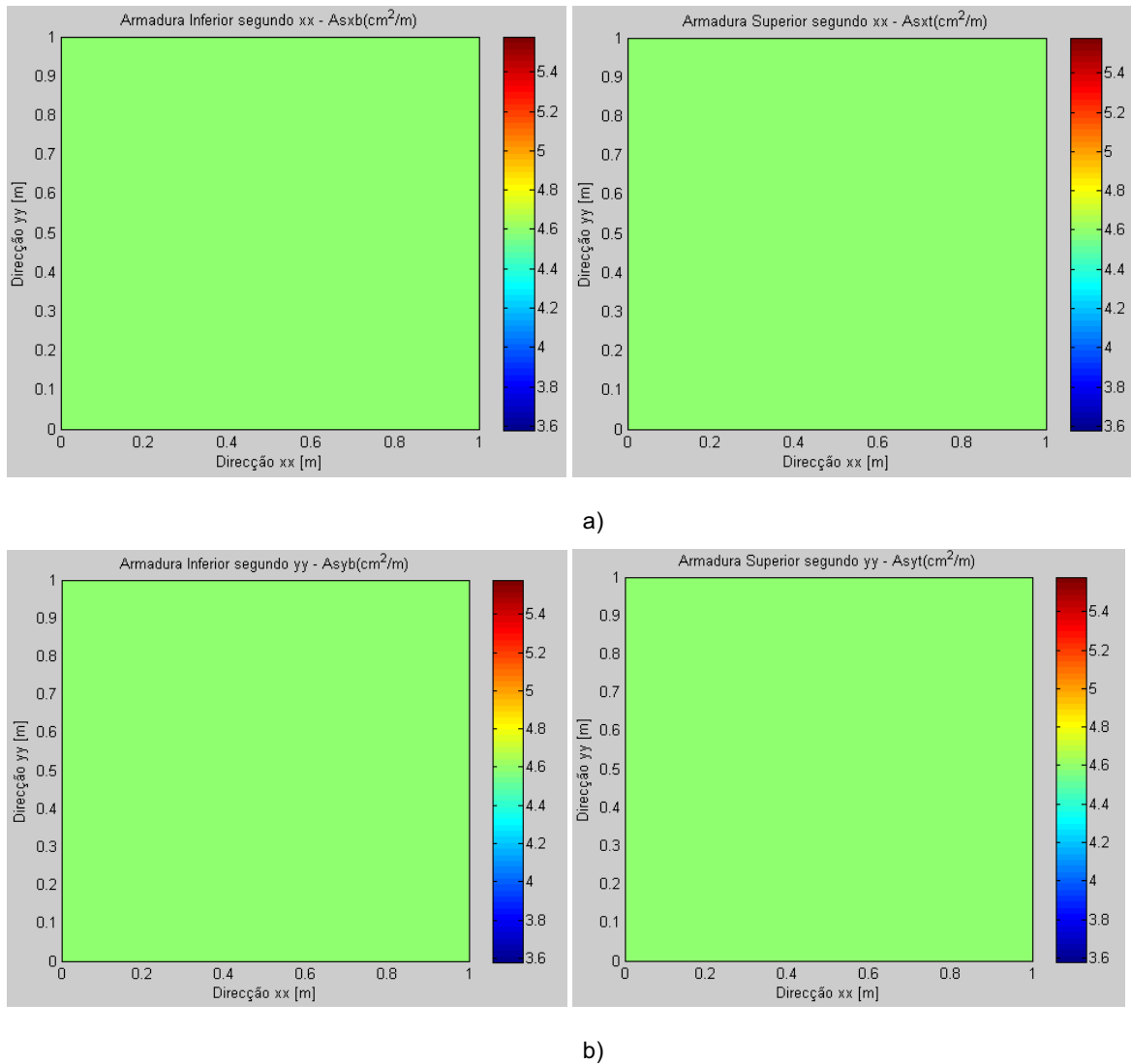


Fig. A.9 – a) Armadura segundo a direcção x; b) Armadura segundo a direcção y

À imagem dos restantes exemplos, também neste se constata que os resultados pelas metodologias de Gupta e pela adoptada no desenvolvimento do programa DesignSlab são muito próximos comprovando a viabilidade do DesignSlab na determinação das armaduras e verificação das compressões nas escoras de betão em lajes maciças.

ANEXO A2

DESENVOLVIMENTO DO INTERFACE GRÁFICO DO PROGRAMA DESIGNSLAB

A2: DESENVOLVIMENTO DO INTERFACE GRÁFICO DO PROGRAMA DESIGNSLAB

Não sendo um dos objectos do presente trabalho o modo como é desenvolvido o interface gráfico do programa analisado, considera-se que é enriquecedor apresentar como se obteve, mesmo que sinteticamente, o interface gráfico.

A construção gráfica da janela interactiva é feita a partir da ferramenta GUIDE disponível no Matlab, tal como se ilustra na Figura A.10.

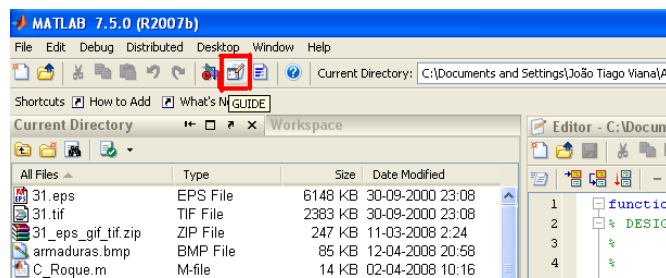


Fig. A.10 – Ícone GUIDE.

Após seleccionar a opção “GUIDE”, abre-se uma janela designada por “GUIDE Quick Star”, a qual permite desenvolver o interface gráfico desejado, como se constata na Figura A.11.

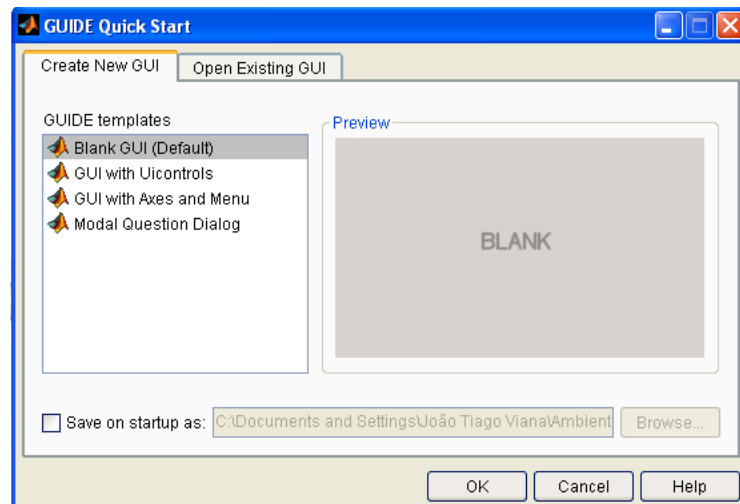


Fig. A.11 – Caixa de dialogo da ferramenta GUIDE

A opção “Blank GUI (Default)” permite desenhar o interface pretendido, tal como se observa na Figura A.12.

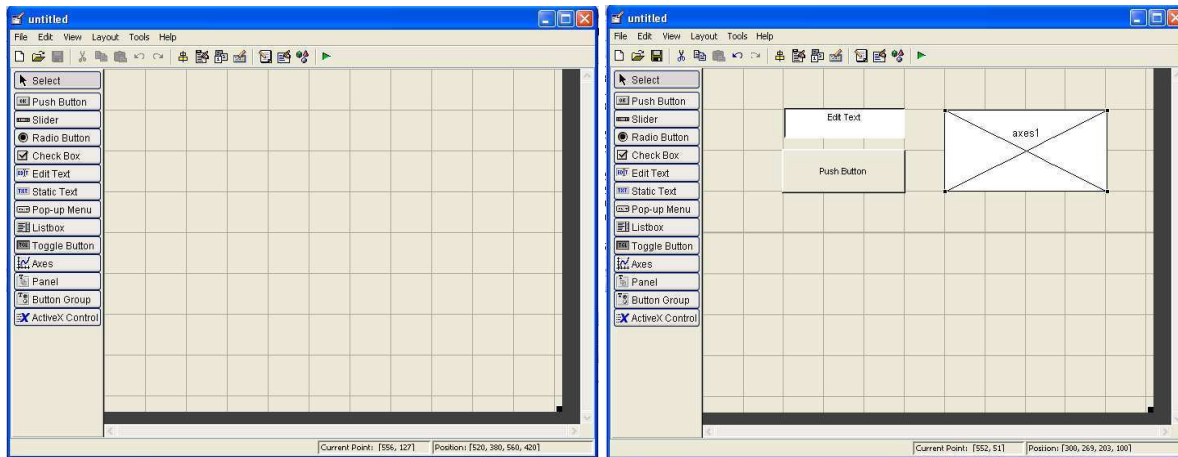


Fig. A.12 – Área de desenho do interface gráfico.

Assim sendo e, tal como se apresenta na figura acima apresentada, é possível definir a disposição dos vários elementos do interface gráfico, como se constata na Figura A.12 do lado direito, onde se definiu uma caixa de entrada de texto – “Edit Text”, um botão de execução – “Push Button” e uma caixa de entrada de uma figura – “Axes1”.

No que respeita a um estudo mais aprofundado da ferramenta GUIDE, a partir da qual se desenvolveu o interface gráfico, o autor sugere o “Manual de Interfaz Gráfica de Usuário em Matlab”, manual este desenvolvido por Diego Guerrero (2007).

